LE TEORIE FONDAZIONALI DI ENNIO DE GIORGI*

Marco Forti
Dipart. di Matematica Applicata "U. Dini"
Università di Pisa, Italy.
forti@dma.unipi.it

"There are more things in heaven and earth
. . . than are dreamt of in your philosophy"
(*Hamlet*, Act I, sc. V, vv. 166–167)

Introduzione: il valore sapienziale dei fondamenti

De Giorgi pensava che un serio studio dei problemi fondazionali portasse a scoprire il valore sapienziale della ricerca e sottolineava l'importanza del rigore matematico non formale, ben rappresentato dal metodo assiomatico tradizionale, che permette di presentare in modo chiaro le proprie proposte, rendendo possibile il contributo critico e propositivo di altri studiosi. In questa accezione i Fondamenti, più che fornire una "base certa" su cui posare tutte le costruzioni matematiche, debbono fornire un ambiente (un quadro assiomatico) in cui poter inserire tali costruzioni; più che essere la *radice* da cui nascono tutti gli alberi della Scienza devono predisporre *una rete di sentieri* per esplorare le foreste della Scienza. Egli vedeva in questa attività il culmine della sua concezione etica della scienza, in cui il dialogo sereno ed aperto tra studiosi di differenti orientamenti, la convivialità della condivisione del sapere, erano visti come fattori di comprensione, amicizia e rispetto per le libertà fondamentali, in difesa delle quali riteneva che le analisi teoriche fossero non meno importanti dell'impegno diretto (cui peraltro mai si sottrasse): non a caso come esempio tipico di *sistema assiomatico fondamentale* egli era solito citare la *Dichiarazione Universale dei Diritti Umani del 10/12/1948*.

Queste tematiche divennero a poco a poco uno dei suoi principali campi di ricerca, che coltivò per un ventennio, con proposte ed elaborazioni di respiro

*Questa nota è una versione riveduta della conferenza tenuta dall'autore alla "Giornata in ricordo di Ennio De Giorgi", Pisa, 30 novembre 2006.

sempre più vasto, che lo impegnarono fino agli ultimi giorni di vita, quando teneva sul comodino nella sua cameretta all'ospedale un blocco in cui annotava assiomi da discutere con gli amici che venivano a trovarlo.

Dal punto di vista metodologico, De Giorgi seguiva il tradizionale metodo assiomatico *contenutistico* usato nella Matematica classica, cercando gli assiomi fra le proprietà più rilevanti degli oggetti presi in considerazione, ben sapendo che gli assiomi prescelti, come altri eventualmente aggiungibili ad essi, non possono comunque esaurire tutte le proprietà degli oggetti considerati; la sua presentazione era rigorosa, ma non legata ad alcun formalismo, anche se apprezzava la possibilità di fornire formalizzazioni da confrontare con le correnti teorie fondazionali di tipo formale. Nel suo approccio ai Fondamenti era essenziale individuare ed analizzare alcuni concetti da prendere come fondamentali, senza però dimenticare che l'infinita varietà del reale non si può mai cogliere completamente, in accordo con l'ammonimento che l'Amleto di Shakespeare dà ad Orazio, e che De Giorgi aveva eletto a sintesi della propria posizione filosofica:

"ci son più cose fra cielo e terra ... di quante ne sogni la tua filosofia"

Ci pare appropriato concludere questa introduzione citando i paragrafi finali dell'ultima sua pubblicazione sui fondamenti, [147]:

> È difficile programmare l'esplorazione del mondo vario, ricco, colorato che dovrebbe ampliare il paradiso di Cantor. Si può solo dire che il successo dell'esplorazione dipenderà probabilmente dal numero e dalla varietà degli esploratori, dalla loro sensibilità nell'apprezzare le migliori tradizioni e le maggiori conquiste culturali del passato unita alle capacità di intuire quali potrebbero essere le innovazioni piú valide e piú feconde. Soprattutto sembra necessario unire fantasia e rigore scientifico, intendendo il rigore nel significato piú ampio che è stato delineato in [150], ove si afferma:
>
> Ogni ricerca sugli assiomi fondamentali di Matematica, Logica e Informatica, come pure delle diverse scienze sperimentali, umanistiche, filosofiche comporta fra l'altro il superamento di una visione troppo chiusa delle diverse specializzazioni ed un'idea piú ampia del rigore matematico o scientifico. Il rigore matematico non è solo accuratezza nelle dimostrazioni, ma anche impegno a esporre nel modo piú chiaro e comprensibile i problemi che si vorrebbero risolvere, i teoremi che si vorrebbero dimostrare, le congetture che si vorrebbero verificare o confutare. Noi riteniamo che il rigore scientifico consista soprattutto nell'esporre chiaramente e liberamente le proprie certezze e i propri dubbi, i problemi che si ritiene di aver risolto e quelli che si vorrebbe risolvere o vedere risolti, evitando solo quei discorsi confusi, oscuri, inutilmente complicati che finiscono con l'annoiare anche l'ascoltatore meglio disposto. In ultima analisi dobbiamo concludere che ogni discorso sul metodo scientifico, sul rigore scientifico e sul significato della Scienza ci riporta alla fine alle piú antiche intuizioni sui valori

sapienziali dell'umiltà, della convivialità (che è insieme condivisione del sapere, amicizia, ricerca di reciproca comprensione) e della fiducia nella Sapienza che viene incontro a coloro che la amano e la cercano.

1 Caratteristiche delle teorie "alla De Giorgi"

Le caratteristiche essenziali delle teorie "alla De Giorgi" possono essere sintetizzate in quattro punti:

- *non riduzionismo*: ogni teoria considera molte specie di oggetti, collegate ma non riducibili l'una all'altra (anche la più astuta codifica di un oggetto altera in qualche misura alcune delle sue caratteristiche fondamentali);
- *apertura*: si deve sempre lasciare spazio per introdurre liberamente e naturalmente in ogni teoria nuove specie di oggetti con le loro proprietà;
- *autodescrizione*: le più importanti proprietà, relazioni e operazioni che coinvolgono gli oggetti studiati dalla teoria, così come le asserzioni ed i predicati che vi si formulano, debbono essere a loro volta oggetti della teoria;
- *assiomatizzazione semi-formale*: i fondamenti di ogni disciplina possono essere presentati in un numero finito di enunciati formulati in modo rigoroso ma non formale, e investigati utilizzando il metodo assiomatico tradizionale della matematica classica.

1.1 Non riduzionismo

Lo sviluppo di modelli matematici ha avuto un'importanza capitale per lo studio di molti concetti scientifici, soprattutto nel fornirne un'analisi *quantitativa*, ma il ridurre totalmente una nozione scientifica ad una sua particolare codifica matematica, anche perfettamente azzeccata, può offuscarne la chiarezza concettuale, concentrando l'attenzione solo su alcuni aspetti, magari importanti, ma trascurandone altri, che potrebbero risultare essenziali in futuri sviluppi della disciplina. Inoltre, soprattutto nelle scienze della natura, la possibilità di introdurre oggetti di tipo *qualitativamente* diverso, e non soltanto differenze *quantitative* all'interno di un unico tipo, facilita notevolmente il compito di introdurre e studiare nuove nozioni emergenti. Perfino nella matematica pura, ove i meriti del riduzionismo insiemistico del XX secolo sono indiscutibili, una sua interpretazione "totalitaria", che ad esempio identifichi le coppie con i duetti di Kuratowski, le relazioni e le operazioni con i loro grafici e i numeri naturali con gli ordinali finiti di Von Neuman, non favorisce certo la formulazione degli assiomi relativi, e rende assai meno naturale l'individuazione delle congetture piú ragionevoli. Possiamo fare tre esempi specifici:

- L'idea intuitiva di *operazione* comprende un qualche processo di computazione, sia pure astratto e non effettivo: si tratta di un concetto *intensionale*, che non è reso adeguatamente dalla semplice riduzione ad un grafico o ad una tabella input-output. La naturale ed espressiva assiomatizzazione delle operazioni di [4] non sarebbe stata proponibile per i loro grafici, in quanto incompatibile con l'estensionalità.

- Riducendo la nozione di *collezione* a quella di operazione caratteristica, si introducono surrettiziamente vincoli di computabilità (per quanto teorica), e non si evidenzia quella che è la proprietà essenziale della natura delle collezioni, cioè l'*estensionalità*.

- Assumendo come primitivo il concetto di *numero naturale* si permette un'analisi delle relazioni fra varie sue importanti modellizzazioni, non solo gli ordinali di Von Neumann, ma anche i cardinali alla Frege-Russell, i numerali alla Church, ecc.

Le teorie non riduzioniste possono apparire *prima facie* eccessivamente articolate ed ingiustificatamente complicate; ma questo è inevitabile per teorie che mirano a comprendere in modo naturale (almeno in linea di principio) l'inesauribile moltitudine dell'esistente ed i sistemi concettuali escogitati per rappresentarlo.

1.2 Apertura ad estensioni

Le nozioni primitive e gli assiomi fondamentali di una teoria generale, come quelli di ogni disciplina specifica, devono essere scelti e formulati in modo da permettere naturali estensioni in ogni ragionevole direzione. Nuovi oggetti e nuovi concetti devono trovare spazio man mano che emergono in modo sufficientemente chiaro dagli sviluppi teorici e sperimentali della ricerca, e dovrebbe essere possibile realizzare questo "innesto" in modo conservativo, senza essere costretti a sottoporre a revisione le principali proprietà precedentemente assiomatizzate. Naturalmente questa conservatività non può essere presa come obbiettivo assolutamente cogente, dato che è sempre difficile, talvolta impossibile, integrare l'enorme quantità di nuovi dati all'interno di un quadro teorico predeterminato.

1.3 Autodescrizione

Le principali proprietà, relazioni ed operazioni che vengono considerate in una teoria fondazionale, cosí come le asserzioni che servono per esporla, devono essere esse stesse oggetti considerati a pieno titolo dalla teoria stessa. Quindi il quadro assiomatico deve prevedere qualità, relazioni, operazioni e asserzioni che coinvolgono anche le stesse qualità, relazioni, operazioni e asserzioni viste come oggetti della teoria.

1.4 Assiomatizzazione "semiformale"

Ogni disciplina ha un oggetto di studio, che intende investigare, accumulando conoscenze fattuali specifiche ed organizzandole secondo i canoni propri della disciplina: ne risulta una serie di fatti che richiedono di essere classificati e collegati organicamente in un corpus di conoscenze. Il metodo assiomatico può giocare un ruolo fondamentale in questo processo, fornendo un sostanziale aiuto per scoprire, organizzare, analizzare, esaminare criticamente e comunicare questo corpus di fatti sperimentali e di elaborazioni teoriche.

Per facilitare l'analisi critica da parte di studiosi di differenti campi di ricerca, la presentazione rigorosa di un numero finito di enunciati espressi in un linguaggio naturale appare assai preferibile ad un'assiomatizzazione completamente formalizzata in uno dei linguaggi artificiali della logica matematica. In particolare un'assiomatizzazione *finita* rende meno necessario il riferimento a specifici presupposti metateorici. Naturalmente occorre rendere i singoli enunciati meno ambigui possibile, curando di fornire una determinazione assiomatica piú precisa possibile di tutti i termini tecnici utilizzati. Questa esigenza è particolarmente sentita nel caso della maggior parte delle scienze applicate, che non hanno ancora sviluppato linguaggi formali appropriati; ma anche in matematica, ove da tempo sono in uso i linguaggi formali, ed anzi le assiomatizzazioni sono ormai correntemente intese come formalizzate nella logica del primo ordine, dovrebbe essere chiaro che nessuna di queste teorie formali può essere presa come definitiva, in quanto ogni formalizzazione coglie solo una parte, e mai tutto il significato inteso della teoria originale.

D'altra parte non va sottovalutato il rilievo che le teorie formali hanno avuto e mantengono nello sviluppo delle scienze: chiamiamo questo approccio *semiformale*, non *informale*, in quanto le assiomatizzazioni proposte debbono essere traducibili naturalmente e direttamente in opportuni linguaggi formali, onde beneficiare degli importanti risultati della moderna logica matematica. Il processo di formalizzazione può risultare prezioso anche dal lato propriamente contenutistico nel caso in cui differenti teorie, una volta formalizzate, mostrino somiglianze o relazioni strutturali che a loro volta suggeriscano analogie o connessioni sostanziali fra le nozioni originali, precedentemente sfuggite all'indagine contenutistica.

2 Il Seminario sui Fondamenti

A partire dalla metà degli anni '70, stimolato anche dalle problematiche emerse nelle sue esperienze di insegnamento presso l'Università dell'Asmara, Ennio De Giorgi decise di trasformare uno dei suoi corsi tradizionali presso la Scuola Normale (quello del mercoledì) in un Seminario in cui discutere ed approfondire tematiche fondazionali insieme a studenti e ricercatori interessati, non necessariamente specialisti di Logica, ma anzi possibilmente rappresentativi di diverse discipline, non soltanto matematiche.

Inizialmente si proponeva soltanto di trovare una formulazione dei consueti

fondamenti insiemistici, atta a fornire una base assiomatica chiara e naturale su cui innestare i concetti fondamentali dell'Analisi Matematica, ma gradualmente le sue riflessioni e le discussioni dentro e fuori del Seminario portarono De Giorgi ed i suoi collaboratori ad elaborare e proporre teorie sempre più generali.

2.1 La Premessa e il Principio di Libera Costruzione

All'inizio ([74]) si partí da un quadro insiemistico tradizionale, ma già modificato in modo da rispettare, almeno in parte, i criteri precedentemente esposti; teorie "all'antica, quindi:

- con *urelementi* (oggetti che non sono insiemi, per garantire non riduzionismo e apertura);
- con *grandi classi* che possono anche essere *elementi di insiemi* (la classe universale V, quella degli insiemi Ins, i grafici delle proiezioni, ed altre classi utili per l'autodescrizione);
- *senza fondazione* (per consentire l'autoappartenenza, ed anche riflessività più complesse utili per l'autodescrizione).

In questo periodo la centralità delle nozioni insiemistiche era conservata; le esigenze di *naturalezza* e di *flessibilità* portarono quindi De Giorgi, che intendeva permettere alla relazione di appartenenza di modellare qualunque relazione, a formulare nel 1979 un suo "Principio di Libera Costruzione", che possiamo brevemente sintetizzare cosí:

PLC - *è sempre possibile costruire un insieme d'insiemi assegnandone liberamente gli elementi mediante un'opportuna parametrizzazione.*

Si tratta probabilmente del più importante contributo tecnico di De Giorgi alla Logica Matematica. Assiomi formali corrispondenti ai casi principali del PLC erano già stati considerati da diversi autori negli anni '30 (Finsler) e '60 (Scott, Boffa, Hajek), ma la generalità e la naturalezza della formulazione degiorgesca hanno permesso un'analisi più approfondita, che ha prodotto *Assiomi di Antifondazione* che sono ora considerati i più appropriati per le applicazioni della teoria degli insiemi alla Semantica e all'Informatica. Paradossalmente il PLC non compare in alcuna pubblicazione di De Giorgi, che, come usava fare per tutti gli sviluppi tecnici degli argomenti trattati nel Seminario, ne affidò lo studio ad allievi e colleghi. Uno studio approfondito di vari assiomi deducibili dal Principio di Libera Costruzione si trova nell'articolo [2].

2.2 La Teoria Quadro e il problema dell'autoriferimento

Nel frattempo De Giorgi andava sviluppando la sua concezione e giungeva ad un superamento decisivo del riduzionismo insiemistico richiedendo che gli urelementi non fossero semplici *atomi privi di struttura*, ma permettessero di recuperare *con naturalezza* molte nozioni tradizionali della matematica (*numeri naturali,*

operazioni, n-uple, etc.). Se nella Premessa [74] insiemi e classi sarebbero stati ancora sufficienti a codificare tutti gli altri oggetti considerati, già nella Teoria Quadro [79] l'uso di *molte differenti specie di oggetti*, non ridotti alle loro codifiche insiemistiche, risulta essenziale per presentare internamente le principali relazioni, operazioni e proprietà degli oggetti considerati dalla teoria stessa.

Nella Teoria Quadro i classici paradossi dell'*autoriferimento* sono superati, anche se non completamente, giocando sulle differenti tastiere fornite dalle varie specie di oggetti introdotti. Se questa varietà permette in pratica di innestare *singolarmente* ogni oggetto voluto, non è però detto che si possano introdurre *simultaneamente* tutti gli oggetti autoreferenziali desiderati. De Giorgi pone il problema in [81], ed i suoi sforzi verso una soluzione *generale* culminano nella Teoria Ampia del 1987, pubblicata nel volume dedicato a J.L.Lions ([86]). in collaborazione con M. Clavelli, M. Forti e V.M. Tortorelli.

2.3 La Teoria Ampia

Nella Teoria Ampia [86] sono presenti tutti i più importanti oggetti considerati in Matematica (*numeri naturali e cardinali, insiemi e classi, coppie e n-uple, operazioni*) ed alcuni fondamentali oggetti logici (*relazioni, proprietà o qualità, proposizioni*); gli assiomi permettono una trattazione naturale delle usuali teorie matematiche ed una descrizione interna assai completa delle operazioni e relazioni considerate. Questa ricchezza pone ovviamente il problema della *consistenza* della teoria stessa: con un atteggiamento tipico delle sue ricerche fondazionali, De Giorgi non affronta direttamente il problema, limitandosi ad analizzare le posibili antinomie, classiche o nuove, e sviluppando la teoria in modo da evitarle, trasformandole in teoremi limitativi.

Naturalmente De Giorgi incitava allievi e colleghi ad un'indagine tecnica più approfondita, in modo da ottenere teorie formali la cui forza di consistenza fosse confrontabile con le consuete teorie insiemistiche, e di cui si potessero considerare modelli più o meno ricchi. La consistenza della Teoria Ampia fu studiata in particolare da G. Lenzi: risultò che la sua non comune capacità di analisi delle antinomie aveva consentito a De Giorgi di evitare l'inconsistenza, ma la spinta ad ottenere la massima comprensività lo aveva portato a rasentare l'abisso, sicché le interessanti estensioni considerate in [86] e [3], come anche altre, ancor più naturali ed apparentemente innocue, risultarono inaspettatamente inconsistenti (cfr. [7]): il requisito dell'*apertura* era stato violato.

2.4 Le Teorie Base e gli "innesti"

Il contrasto tra l'ampiezza della teoria e la sua apertura ad estensioni generò un decisivo spostamento di obbiettivo: non più teorie *generali* di tutta la Matematica, ma *teorie-base*, con pochi oggetti ed assiomi meno impegnativi, sufficienti per fornire un quadro assiomatico leggero e flessibile, fortemente autodescrittivo ed aperto ad ogni tipo di *innesto*, non solo di nozioni matematiche, ma anche logiche e informatiche (e in prospettiva dei concetti di ogni disciplina analizzata

in modo *sufficientemente chiaro*). In base alle analisi precedenti furono isolati pochi assiomi generali concernenti *qualità, relazioni, collezioni* e *operazioni*, sufficienti per darne le proprietà essenziali. Dopo le prime proposte contenute in [94] e [98], le Teorie Base assunsero forma compiuta in [131].

Con la rinucia a teorie onnicomprensive diveniva essenziale prevedere lavori specifici per innestare sulle teorie base le principali nozioni della Matematica e di altre discipline: De Giorgi si limitò a riconsiderare in [132] il concetto classico di *variabile* della Fisica Matematica e a trattare in [139] le nozioni logiche di *proposizione* e *predicato*, affrontando ivi per la prima volta la problematica nozione di *verità*. L'innesto di argomenti della Matematica, della Logica e dell'Informatica richiedenti maggiori dettagli tecnici venne lasciato da De Giorgi ai suoi collaboratori, cui non fece mai mancare il suo contributo di discussioni, proposte ed elaborazioni personali. Ricordiamo qui, come esempi tipici di "teorie alla De Giorgi", da lui spesso citate nel Seminario, le due teorie generali per i concetti di *collezione, insieme* e *funzione* ([5]) e per quello di *operazione* ([4]) elaborate da M. Forti e F. Honsell sulla base delle discussioni comuni.

2.5 Le teorie del 2000 e il problema della Verità

Le teorie di De Giorgi, anche per la maggiore attenzione dimostrata da scienziati applicati (fisici, biologi, economisti) rispetto a matematici e logici, alla metà degli anni Novanta si stavano svincolando dalle origini matematiche, per divenire autentiche basi generali *interdisciplinari*. Questo nuovo approccio, iniziato con [145], poteva produrre teorie estremamente interessanti (anche prima del terzo millennio, cui De Giorgi amava scherzosamente assegnarle), ma la morte ne troncò prematuramente l'attività nell'ottobre del 1996. Ne restano i lavori [150], [147] e [148], da intendersi come suggerimenti da sviluppare, e che in effetti erano già stati in parte superati da De Giorgi stesso nel suo impetuoso percorrere il nuovo filone di ricerca. Un'eco degli ultimi suggerimenti di De Giorgi si può trovare in [6] e in [1], che sistematizzano e sviluppano proprio questi temi.

Nel nuovo approccio i *numeri naturali* perdono la centralità che avevano in tutte le teorie precedenti, mentre *qualità* e *relazioni* rimangono i soli concetti fondamentali indefiniti: non nel senso riduzionista che *ogni altra nozione si scompone alla fine in qualità e relazioni*, ma semplicemente postulando che tutti *gli altri concetti fondamentali considerati (collezioni, operazioni, proposizioni, predicati, ecc.) sono introdotti, qualificati e governati da opportune relazioni e qualità fondamentali*. In particolare *proposizioni* e *predicati* assumono un ruolo essenziale per l'autodescrizione, e la nozione di *verità* (assoluta), come qualità di alcune proposizioni, balza in primo piano.

Gli sviluppi piú originali, che tratteremo brevemente nelle prossime sezioni, riguardano proprio l'introduzione di *calcoli logici semantici, non formali*, ed il recupero della *nozione interna di verità*, così congeniale alle idee generali di De Giorgi. Ne deriva una nuova interpretazione della classica *Antinomia del Mentitore*, che dà origine a problemi molto interessanti e meritevoli di ulteriori approfondimenti: pur mantenendo le usuali leggi della logica proposizionale classica, ed in particolare il *Terzo Escluso*, questi calcoli logici producono neces-

sariamente *predicati non classici*, ad esempio predicati *la cui generalizzazione universale non può essere vera, pur essendone vera ogni singola istanza.*

3 Una teoria fondazionale "alla De Giorgi"

Presentiamo qui una versione semplificata di teoria fondazionale dell'ultimo periodo di Ennio De Giorgi; per favorire la leggibilità esporremo gli assiomi in modo discorsivo ed informale: nel caso che questa esposizione non risultasse adeguata per una completa comprensione dell'analisi di alcuni caratteristici effetti del classico "Paradosso del Mentitore" considerati nella prossima sezione, il lettore può trovare in appendice una precisa versione degli assiomi.

Partendo dall'osservazione che ogni disciplina tratta, in definitiva, di vari oggetti *qualitativamente diversi* e studia *proprietà, relazioni* e *operazioni* che li coinvolgono, sembra ragionevole scegliere come *primitive*, cioè non riducibili a concetti introdotti precedentemente, le nozioni *prematematiche* di *qualità* (o *proprietà)* e *relazione.*

- **Le nozioni primitive**
  - *l'oggetto q è una qualità*;
  - *l'oggetto r è una relazione binaria*;
  - *l'oggetto s è una relazione ternaria*;
  - *l'oggetto x ha la qualità q* (denotato $q\,x$);
  - *gli oggetti x, y sono nella relazione binaria r* (denotato $r\,x, y$);
  - *gli oggetti x, y, z sono nella relazione ternaria s* (denotato $s\,x, y$).

Naturalmente per trattare le qualità e le relazioni si introducono opportune qualità che le classificano e appropriate relazioni fondamentali che ne descrivono il comportamento. Dovendo poi trattare oggetti di *ogni specie*, per cui possono non esistere *criteri espliciti di uguaglianza*, si introduce come relazione fondamentale anche l'*identità Rid.*

- **Le qualità classificanti**
  - $Qqual$, la qualità di essere una *qualità*;
  - $Qrelb$, la qualità di essere una *relazione binaria*;
  - $Qrelt$, la qualità di essere una *relazione ternaria.*
- **Le relazioni fondamentali**
  - $Rqual$, la relazione binaria t.c. $Rqual\,q, x \iff Qqual\,q\ \&\ q\,x$;
  - $Rrelb$, la relazione ternaria t.c. $Rrelb\,r, x, y \iff Rrelb\,r\ \&\ r\,x, y$;
  - Rid, la relazione binaria di identità t.c. $Rid\,x, y \iff x = y$ (cioè x e y sono lo stesso oggetto).

A prima vista il comportamento delle *relazioni ternarie* rimane privo di una descrizione interna: questa richiederebbe una *relazione quaternaria Rrelt*, dando cosí il via ad una serie infinita di relazioni fondamentali di "arietà" crescente, come in [131]. In realtà una descrizione interna si può avere in vari modi pur fermandosi ad un basso livello di complessità: qui, come in [150, 147] e in [6, 5], dopo aver introdotto i predicati, le proposizioni e la verità, otterremo una descrizione interna del comportamento delle relazioni quaternarie (e di tutti gli oggetti considerati dalla teoria) tramite la verità delle corrispondenti "proposizioni fattuali".

Dato che in tutte le teorie scientifiche occorrono, oltre a relazioni e qualità, altre due specie di oggetti fondamentali, *operazioni* e *collezioni*, introduciamo questi concetti mediante l'uso di *qualità* che le classificano, e di *relazioni* che ne descrivono il comportamento: questo sarà lo schema base per innestare nella teoria qualunque nuova nozione (naturalmente una volta introdotte le operazioni e le collezioni, anch'esse potranno essere usate in tali innesti).

- **Le operazioni**

Il concetto di *operazione* si basa solo sull'idea che un'operazione *agisce* su un oggetto e può produrre un *risultato*. Quindi introduciamo

- la qualità *Qop* di essere un'*operazione* e
- la corrispondente *relazione fondamentale Rop*, t.c.

$$Rop\, f, x, y \text{ vale} \iff f \text{ è un'operazione e } fx = y,$$

Si postula la *funzionalità* delle operazioni, cioè che *il risultato fx dell'applicazione di un'operazione f è univocamente determinato dall'argomento x*; ma non l'*estensionalità*, in quanto *operazioni differenti* potrebbero *agire sugli stessi oggetti e dare gli stessi risultati*. Per utilizzare effettivamente la teoria occorre postulare l'esistenza di appropriate operazioni fondamentali; tra le varie scelte possibili un sistema molto efficiente è dato dalla coppia K (*generatore di costanti*) e S (*combinatore di Schönfinkel*) (vedi [1]):

- K associa a x l'operazione Kx tale che $(Kx)y = x$ per ogni y;
- S date le operazioni f, g produce le operazioni $Sf, (Sf)g$ tali che $((Sf)g)x = y \iff (fx)(gx) = y$.

- **Le collezioni**

Il concetto di *collezione* intende catturare la nozione intuitiva di *"aggregato di oggetti qualunque in un tutto"*, che sta alla base delle definizioni di *classe* and *insieme*, date da Frege e Cantor. Si tratta di una nozione *estensionale* per natura, in quanto collezioni che hanno gli stessi oggetti sono identiche. Quindi introduciamo

- *Qcoll*, la qualità di essere una *collezione*;

– *Rcoll* e *Rincl*, le relazioni di *appartenenza* e di *inclusione*, t.c.

$$\mathit{Rcoll}\, C, x \text{ vale} \iff C \text{ è una collezione e } x \in C,$$
$$\mathit{Rincl}\, C, D \text{ vale} \iff C, D \text{ sono collezioni e } D \subseteq C.$$

Occorre anche postulare l'esistenza di appropriate collezioni e operazioni su collezioni: qui ci limitiamo alle due operazioni

– $Sing$, che genera i singoletti, tale che $Sing\, x = \{x\}$ per ogni x;

– $Compl$ che, applicata ad una collezione C, produce l'operazione $Compl\, C$ di *complemento relativo a* C, tale che $(Compl\, C)D = C \setminus D$ per ogni collezione D;

– e alla *collezione universale* V tale che $x \in V$ per ogni x.

In questo modo si hanno a disposizione tutte le collezioni finite e cofinite. Volendo introdurre il concetto piú "matematico" di *insieme*, inteso come *"collezione piccola e maneggevole"*, in contrasto con le generiche collezioni, *"troppo grandi e/o complicate"*, si potrebbe aggiungere la collezione Ins che raccoglie tutti gli insiemi, dotandola delle opportune proprietà di chiusura.

Uno sviluppo dettagliato della teoria di operazioni e collezioni, tipo quello di [5], esula dagli scopi di questa esposizione, che intende presentare un sistema assiomatico *minimale*, pronto per l'assiomatizzazione di varie differenti discipline. Concludiamo invece la sezione con un'introduzione *non formale* delle nozioni fondamentali di proposizione e predicato, che costituisce uno degli aspetti piú caratteristici delle ultime teorie fondazionali di De Giorgi.

- **Predicati e proposizioni**

I *predicati* sono introdotti "alla Frege", come *operazioni totali*, che producono altri predicati e, in un numero finito di passi, *proposizioni*. Per comodità le proposizioni sono intese come *predicati autoreplicanti*, cioè predicati P tali che $Px = P$ per ogni x.

– I predicati (e le proposizioni) sono soggetti alle consuete *operazioni booleane* Et, Vel, Non (denotate in seguito con $\wedge, \vee, \neg$) e alle operazioni di *quantificazione esistenziale* e *universale* (denotate in seguito con $\exists$, $\forall$).

– Ogni qualità o relazione dà luogo ad un *"predicato virgolettato"*, che, applicato in successione al numero giusto di oggetti, produce la *"proposizione fattuale"* che afferma che tali oggetti sono nella relazione o godono della proprietà corrispondente.

Ad es. "*Rqual*" è un predicato che, applicato prima a q e poi a x produce la proposizione fattuale "*Rqual*"$qx =$"$\mathit{Rqual}\, q, x$" che intuitivamente afferma che "q è nella relazione *Rqual* con x". Si osservi che se q è una qualità il predicato "q" applicato a x produce la proposizione "q"$x =$ "qx", che afferma che x ha la qualità q. Le due proposizioni sono intuitivamente equivalenti, e si possono

anche assumere uguali. Ma se q non è una qualità, la proposizione "$Rqual\, q, x$" esiste sempre (e intuitivamente non è vera), mentre "qx" e/o "q"x potrebbero non esistere, oppure esistere e non essere proposizioni, o essere proposizioni diverse (fra loro e da "$Rqual\, q, x$").

Anche le operazioni producono predicati virgolettati, e quindi proposizioni fattuali, tramite la loro relazione fondamentale *Rop*: la proposizione "*Rop*"fxy afferma che f è un'operazione semplice e $fx = y$, quindi se f è un'operazione semplice si può porre "f"="*Rop*"f e "$fx = y$"="*Rop*"fxy. Dato che la proposizione finale dipende dall'ordine in cui sono scelti gli oggetti cui applicare un predicato, diviene importante l'uso di "combinatori" che trasformino opportunamente i predicati: ad esempio, i combinatori C e W applicati al predicato "*Rop*" lo trasformano in modo che C"*Rop*" e W"*Rop*" applicati a x, y, z producano le proposizioni "$yx = z$" e $xx = y$, rispettivamente, anziché "$xy = z$". Non è difficile dimostrare che C e W, come tutte le "permutazioni, ripetizioni e cancellazioni di argomenti" sono realizzabili mediante opportune combinazioni delle operazioni K ed S (e questa è una delle ragioni per cui si è scelto di introdurre i predicati come *operazioni totali* e le proposizioni come *operazioni autoreplicanti*).

- **La verità**

La *verità* è introdotta come una qualità $Qver$ di proposizioni, che soddisfa le condizioni seguenti

– per i *connettivi* $\&, \vee, \neg$ si assumono le regole *classiche*, ad es. $p \wedge q = (Et\, p)q$ è vera (gode di $Qver$) se e solo se p e q sono entrambe proposizioni vere;

– per i *quantificatori* si assume *soltanto una* delle due implicazioni classiche: dato un predicato *unario* P, ossia tale che Px è una proposizione per ogni x, si ha

  - se *almeno una proposizione* Px è vera, allora $\exists P$ è vera;
  - se $\forall P$ è una proposizione vera, allora *tutte le proposizioni* Px sono vere.

– Nel caso di *predicati classici* valgono anche le implicazioni inverse, ma questo si rivelerà un *punto chiave del problema della verità*.

Concludiamo questa sezione osservando che, come preannunciato, si può *completare l'anello dell'autodescrizione interna della teoria mediante l'uso della verità delle proposizioni fattuali*. Infatti, dato che le qualità e le collezioni sono governate dalle relazioni binarie *Rqual* e *Rcoll*, che a loro volta, come tutte le relazioni binarie e le operazioni, sono governate dalle relazioni ternarie *Rrelb* e *Rop*, si tratta solo di descrivere internamente il comportamento di queste due relazioni ternarie: a tale scopo basta semplicemente osservare che *Rrelb* x, y, z (rispettivamente *Rop* x, y, z) *vale se e solo se la proposizione* "*Rrelb* x, y, z" (rispettivamente "*Rop* x, y, z") *gode della qualità Qver*.

4 Il paradosso del Mentitore

Il ben noto paradosso di Epimenide o del mentitore, usato da Tarski nei suoi teoremi limitativi e studiato da De Giorgi in vari lavori, intuitivamente consiste nel fatto che la frase

"Io sto mentendo",

che si tramanda pronunciata da Epimenide il cretese, non può essere né vera né falsa: se infatti fosse vera, allora Epimenide starebbe mentendo, e dunque la frase pronunciata dovrebbe essere falsa; d'altronde se la frase fosse falsa, allora Epimenide non starebbe mentendo, quindi la frase pronunciata dovrebbe essere vera: *per il principio di non contraddizione la frase non può essere né vera né falsa.*

Il paradosso del mentitore può essere formalizzato in molte teorie matematiche dotate di autoriferimento, come l'aritmetica e la teoria degli insiemi, dando luogo a fenomeni interessanti, ma solo tramite opportune codifiche (*gödelizzazioni*). Nelle teorie "alla De Giorgi", ove sono presenti tutti gli oggetti usuali della logica e della matematica, relazioni, qualità, operazioni, in particolare proposizioni e predicati, insieme alla *qualità di essere una proposizione vera*, il paradosso si può ottenere direttamente, senza bisogno di gödelizzazioni, costruendo un "predicato del Mentitore" Ψ (*Pseudómenos*) che, applicato ad un oggetto x, produca la proposizione Ψx che afferma

"x applicato ad x produce una proposizione non vera";

infatti in tal caso, essendo Ψ effettivamente un predicato a valori proposizioni, *la proposizione $\psi = \Psi\Psi$ è vera se e solo se non lo è.* Un predicato del Mentitore si può ottenere a partire da predicati virgolettati costruendo prima un predicato (binario) Φ tale che Φxy sia la proposizione

$$\neg\text{“}Qver\, x\text{”} \ \wedge\ \text{“}yy = x\text{”},$$

e quantificando esistenzialmente Φ, dimodoché $\Psi y = \exists x.\, \Phi xy$. Infatti, ponendo in $y = \Psi$ in Φxy, si ottiene la proposizione $\Phi x\Psi = \Xi x$ che è la congiunzione di due proposizioni, la seconda delle quali, "$\Psi\Psi = x$", è vera se e solo se x è proprio $\psi = \Psi\Psi$, mentre la prima, $\neg$"$Qver\, x$", è vera se e solo se x non è una proposizione vera: dunque Ξx non è vera se $x \neq \psi$, mentre $\Xi\psi$ è vera se e solo se ψ non lo è. Se la verità del quantificatore esistenziale seguisse sempre le leggi classiche, la proposizione $\psi = \Psi\Psi = \exists x\,.\,\Xi x$ sarebbe vera se e solo se $\Xi\psi$ fosse vera: quindi, come preannunciato, avremmo che

ψ è una proposizione vera se e solo se non lo è.

Si osservi che ψ è *un'affermazione esistenziale che non può essere falsa pur essendolo tutte le sue istanze.* Avremmo potuto considerare, anziché il predicato Φ un predicato Φ^* tale che

$$\Phi^* xy = \neg(\text{“}yy = x\text{”} \ \wedge\ \text{“}Qver\, x\text{”})\,:$$

allora, quantificando universalmente Φ^*, si otterrebbe un predicato Ψ^* tale che $\Psi^* y = \forall x.\, \Phi^* xy$, e quindi si avrebbe ancora che $\Psi^*\Psi^* = \psi^*$ è una proposizione vera se e solo se non lo è, ma, dualmente, questa volta si tratterebbe *un'affermazione universale che non può essere vera nonostante lo siano tutte le sue istanze*.

Nella costruzione dei predicati Φ e Φ^* entrano soltanto i "predicati virgolettati" corrispondenti alla qualità *Qver* ed alla relazione di applicazione *Rop*:[1] abbiamo quindi dimostrato

Teorema di Epimenide-Tarski-De Giorgi.

Almeno uno dei due predicati che esprimono la verità delle proposizioni e l'applicazione delle operazioni, "Qver" e "Rop", non si comporta in modo classico rispetto alla quantificazione.

Naturalmente ci sono vari modi di "uscire dal paradosso". Ad esempio, una lettura immediata del teorema suggerisce di non mettere sui predicati gli assiomi "classici" di verità per la quantificazione (che è proprio la scelta effettuata nella teoria che abbiamo esposto nella sezione 3); d'altronde, se ci piacessero particolarmente gli assiomi forti di quantificazione, potremmo mantenerli al prezzo di limitare gli assiomi sui connettivi; oppure potremmo decidere che "*Rop*" si comporta in modo classico (essendo un predicato "matematico") e scaricare il problema su "*Qver*", che è chiaramente il predicato piú "controverso"; e molte altre soluzioni sono concepibili, lasciando quindi la libertà di scegliere tra vari pacchetti assiomatici interessanti, sapendo però che *l'intero insieme degli assiomi desiderabili è contraddittorio*.

Dato che il teorema non implica l'esistenza di *proposizioni non classiche*, sembra possibile assumere che tutte le proposizioni si comportino classicamente, e quindi il Terzo Escluso valga sempre, anche se non tutti i predicati usati nella loro costruzione lo fanno. In particolare sembra naturale postulare la classicità di tutte le proposizioni ottenute combinando le "proposizioni fattuali" ottenute dai "predicati virgolettati", compresi quelli che non sono "classici". Questa situazione si accorderebbe, paradossalmente, con la visione intuizionista, per cui decidere singole proposizioni può essere possibile anche se manca una procedura uniforme di decisione per tutte le proposizioni generate da un dato predicato.

Per concludere

Ci sembra appropriato concludere questa nota con alcuni punti tratti da *tre foglietti manoscritti* che Ennio De Giorgi aveva scritto in ospedale ed affidato all'autore perché ne curasse la redazione e la diffusione "tra gli amici interessati" (una trascrizione integrale è ora pubblicata in [SS]).

[1] Precisamente, usando gli assiomi e le notazioni dell'appendice, si ha

$$\Phi = C(W\text{“}Rop\text{”} \wedge \neg(K\text{“}Qver\text{”})), \Psi = \exists\Phi,\ \Phi^* = \neg(C(W\text{“}Rop\text{”} \wedge K\text{“}Qver\text{”})),\ \Psi^* = \forall\Phi^*.$$

Foglietto del 7/X/1996

1. Cercare di fissare una lista di oggetti fondamentali di una certa teoria risponde ad un'esigenza non solo tecnica ma anche etica: la ricerca di una migliore comprensione ed amicizia fra studiosi che hanno idee simili ed idee differenti e cercano di riconoscerle con la piú ridotta possibilità di ambiguità e di equivoci. Non ci aspettiamo il metodo infallibile per eliminare tutti gli equivoci, le ambiguità, le incomprensioni, ma un onesto impegno per ridurle.

2. Il metodo assiomatico può servire al dialogo tra diversi studiosi, ma anche a quello *dello studioso con se stesso*. Può aiutare a capire che alcune affermazioni che crediamo chiarissime sono assai meno chiare, può rivelarci occulte contraddizioni, ma può anche farci scoprire un'inattesa ricchezza di qualche nostra idea di cui sottovalutavamo l'interesse.

3. Nelle diverse realizzazioni del metodo assiomatico possono incontrarsi persone che hanno "filosofie" implicite o esplicite molto differenti; (...)

4. Forse qualche applicazione significativa dei metodi assiomatici potrebbe riguardare le idee di mente, cuore, pensiero, persona, corpo, anima, cervello, intelligenza (naturale o "artificiale"), ragione, scienza, fede, religione, esperienza, esperimento, reti neurali e struttura della logica formale, realtà, immaginazione, conoscenza, comprensione, "spiegazione" dei fenomeni, collegamenti tra principi logici e principi etici, e tanti altri campi in cui spesso l'impegno a sostenere le proprie idee è piú grande della volontà di farle veramente *comprendere*.

5. (...)

6. Le applicazioni piú semplici del metodo assiomatico alla matematica ed alla logica potrebbero estendersi forse "facilmente" alla cosmologia o alla fisica teorica. Tuttavia potrebbero essere assai promettenti le applicazioni [del metodo assiomatico] alle diverse teorie economiche e ad altre scienze umane; per esempio nella considerazione dei diritti umani andrebbe evidenziata la "struttura assiomatica" della Dichiarazione Universale dei Diritti Umani del 10 dicembre 1948.

7. Oggetto "difficile" del metodo assiomatico sembra la storia; tuttavia analisi assiomatica delle nozioni di "verità storica", di "fatti storicamente accertati", di "documento", etc. potrebbero almeno scoraggiare lo *storicismo*, cioè la pretesa di *ridurre la comprensione di alcune idee* alla piú o meno accurata ricostruzione della loro storia.

8. Quando parlo di sistemi di assiomi non mi riferisco solo alla loro struttura formale; tuttavia lo studio della struttura formale dei sistemi di assiomi può essere molto importante; analogie formali possono farci sospettare collegamenti sostanziali, profondi tra diversi oggetti, diverse teorie.

Foglietto del 9/X/1996

1. Una buona base assiomatica per tutte le scienze sembra costituita dai tre tipi di oggetti fondamentali: *qualità, relazioni e proposizioni*. Su di essi sono possibili molti innesti.

2. Su relazioni, qualità e proposizioni è facile innestare operazioni, collezioni, insiemi, correlazioni (funzioni ed n-uple), numeri naturali, formule.

3. Le *interpretazioni* sono operazioni J tali che, se ϕ è una formula, $J\ \phi$ è una proposizione.

4. Formule e proposizioni sono oggetti *qualitativamente diversi*.

5. Le proposizioni sono più "metafisiche". Le formule dovrebbero comprendere svariati sistemi di simboli, (ivi compresi gli "oggetti neuronali").

6. Un "discorso assiomatico" su q, r, p rinvia a tempi migliori (e forse lontani) la discussione su "enti metafisici" ed "enti neuronali"; ciò che basta in un primo tempo è la distinzione qualitativa tra proposizioni e formule; ciò può essere espresso mediante la semplice introduzione delle qualità $Qgprop$ e $Qgfor$; la prima qualità è goduta da svariate proposizioni, la seconda da svariate formule.

7. Un elenco preliminare di concetti primitivi di una teoria è una richiesta ragionevole anche se non è facile soddisfarla. D'altra parte il rifiuto dell'elenco può essere un modo per sfuggire alle proprie responsabilità e nascondere occulte contraddizioni.

Foglietto del 10/X/1996

1. La scoperta di contraddizioni e ambiguità in una teoria a cui pure eravamo attaccati e che emergono da una piú accurata e completa assiomatizzazione non deve essere vissuta come sconfitta e delusione. Può essere il punto di partenza di una riformulazione della teoria molto piú bella e ricca.

2. In termini di pura esperienza di storia della scienza ho notato che i piú grandi salti in avanti nascono dallo sfruttamento di un insuccesso, e non dallo fruttamento (pur utile e importante) di successi delle precedenti teorie scientifiche.

3. Forse i punti 1 e 2 hanno una portata piú generale. Per esempio, l'uomo che si riconosce debole, ignorante, peccatore è meglio disposto ad accogliere la luce dello Spirito.

4. Forse la parola "assioma" scoraggia i non matematici (e anche molti matematici??). Può essere utile tentare di collegarla ad altre idee a cui è *realmente* vicina, per esempio quella di "dialogo serio interpersonale" in cui tutti cercano una reale comprensione dell'altro.

Bibliografia

Un volume di opere scelte di Ennio De Giorgi, che contiene le traduzioni in inglese di tutti i principali lavori scientifici (ed anche il testo originale italiano dei piú importanti) è stato pubblicato a cura di L. Ambrosio, G. Dal Maso, M. Forti, M. Miranda e S. Spagnolo:

[OS] E. De Giorgi - *Selected Papers*, Berlin-Heidelberg-New York 2006.

Molti scritti fondazionali, filosofici ed epistemologici sono contenuti, insieme ad altri di carattere generale e "politico-sociale", in due volumi: il primo a cura di A. Marino e C. Sbordone

[MS] E. De Giorgi - *Riflessioni su Matematica e Sapienza*, Quaderni dell'Accademia Pontaniana **18**, Napoli 1996;

il secondo a cura di F. Bassani, A. Marino e C. Sbordone

[SS] E. De Giorgi - *Anche la scienza ha bisogno di sognare*, Pisa 2001.

I lavori di De Giorgi sono citati nel presente articolo seguendo la numerazione della lista completa di tutte le pubblicazioni scientifiche di Ennio De Giorgi contenuta in [OS]:

[74] E. De Giorgi, M. Forti - *Premessa a nuove teorie assiomatiche dei fondamenti della matematica*. Quad. Dip. Mat. **54**, Pisa 1984.

[79] E.De Giorgi, M.Forti - Una teoria quadro per i Fondamenti della Matematica, *Atti Acc.Naz.Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8)**79** (1985), 1-8.

[81] E. De Giorgi, M. Forti, V. M. Tortorelli - Sul problema dell'autoriferimento. *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8) **80** (1986), 363-372.

[86] M.Clavelli, E.De Giorgi, M.Forti, V.M.Tortorelli - A self-reference oriented theory for the Foundations of Mathematics, in *Analyse Mathématique et applications - Contributions en l'honneur de Jacques-Louis Lions*, Gauthier-Villars, Paris 1988, 67-115.

[94] E. De Giorgi - Fondamenti della Matematica e "Teoria base". L'esempio della teoria 7×2, Quad. Dip. Mat. Univ. Lecce **3** (1990), 56–62. *Teorie Base Semifinite*. Quad. Scuola Norm. Sup. **146**, Pisa 1992.

[98] E. De Giorgi, M. Forti - *"5×7": a Basic Theory for the Foundations of Mathematics*. Quad. Scuola Norm. Sup. **7**, Pisa 1990.

[131] E.De Giorgi, M.Forti, G.Lenzi - Una proposta di Teorie Base dei Fondamenti della Matematica, *Rend. Mat. Acc. Lincei* (9) **5** (1994), 11–22.

[132] E.De Giorgi, M.Forti, G.Lenzi - Introduzione delle variabili nel quadro delle Teorie Base dei Fondamenti della Matematica, *Rend.Mat.Acc.Lincei* (9) **5** (1994), 117–128.

[139] E.De Giorgi, M.Forti, G.Lenzi, V.M.Tortorelli - Calcolo dei predicati e concetti metateorici in una teoria base dei Fondamenti della Matematica, *Rend.Mat.Acc.Lincei* (9) **6** (1995), 79–92.

[145] E. De Giorgi, G. Lenzi - La teoria '95. Una proposta di teoria aperta e non riduzionistica dei fondamenti della Matematica, *Atti Accad. Naz. Sci. dei XL, Mem. Mat. Appl.* **20** (1996), 7–34.

[147] E.De Giorgi, M.Forti, G.Lenzi - Verità e giudizi in una nuova prospettiva assiomatica, in *Il fare della Scienza: i fondamenti e le palafitte* (F.Barone *et al.*, eds.) *Con-tratto* (1996), 233–252.

[148] E.De Giorgi, M.Forti - Dalla Matematica e dalla Logica alla Sapienza, in *Pensiero scientifico: fondamenti ed epistemologia - Atti del IV Convegno storico scientifico di Ancona, 15-19 marzo 1996* (A. Repola Boatto, ed.). Ancona 1997, 17–36.

[150] E.De Giorgi, M.Forti, G.Lenzi - Verso i sistemi assiomatici del 2000 in Matematica, Logica e Informatica, *Nuova civiltà delle Macchine* **57–60** (1997), 248–260.

Altri riferimenti bibliografici:

[1] M.Forti - *Lezioni sui Fondamenti della Matematica*, Quad. Dip. Mat. Appl. U.Dini **11**, Pisa 1998.

[2] M. Forti, F. Honsell - Set theory with free construction principles. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci.* (4) **10** (1983), 493–522.

[3] M.Forti, F.Honsell - Models of Selfdescriptive Set Theories, in *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations - Essays in Honor of E. De Giorgi*, I (F.Colombini *et al.*, eds.), Birkhäuser, Boston 1989, 473–518.

[4] M.Forti, F.Honsell, M.Lenisa - An Axiomatization of Partial n-place Operations, *Math. Struct. Computer Sci.* **7** (1997), 283–302.

[5] M. Forti, F. Honsell, M. Lenisa - Operations, Collections and Sets within a general axiomatic framework, in *Logic and Foundations of Mathematics* (A. Cantini, E. Casari and P. Minari, eds.). *Synthèse Library* **280**, Kluwer, Dordrecht 1999, 1–24.

[6] M.Forti, G.Lenzi - *A General Axiomatic Framework for the Foundations of Mathematics, Logic and Computer Science.*, *Rend. Acc. Naz. Sci. XL, Mem. Mat. Appl.* **21** (1997), 171–207.

[7] G. Lenzi – Estensioni contraddittorie della teoria Ampia, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat.*, (8) **83** (1989), 13–28.

Appendice: gli assiomi

Diamo in questa appendice una versione precisa della teoria assiomatica esposta nella sezione 3. Per maggiori chiarimenti, dimostrazioni ed estensioni cfr. [1].

Assioma 1. *$Qqual, Qrelb, Qrelt, Qrelq$ sono qualità, e si ha*

1. *x è una qualità $\iff$ $Qqual\ x$;*
2. *x è una relazione binaria $\iff$ $Qrelb\ x$;*
3. *x è una relazione ternaria $\iff$ $Qrelt\ x$.*

Assioma 2.

1. *$Rqual$ è una relazione binaria t.c. $Rqual\ q, x \iff Qqual\ q\ \&\ q\,x$;*
2. *$Rrelb$ è una relazione ternaria t.c. $Rrelb\ r, x, y \iff Rrelb\ r\ \&\ r\ x, y$;*
3. *Rid è una relazione binaria t.c. $Rid\,x, y \iff$ x e y sono lo stesso oggetto.*

Assioma 3. *Qop è la qualità di essere un'operazione, Rop è la relazione ternaria di applicazione. Si ha*

1. *$Rop\,x, y, z \implies Qop\,x$;*
2. *$Rop\,f, x, y\ \&\ Rop\,f, x, z \implies y = z$.*

Notazione: Se f è un'operazione $fx = y$ sta per $Rop\,f, x, y$ e in tal caso fx denota (quell'unico) y. Se fx è un'operazione fxy denota $(fx)y$ (quando esiste), se fxy è un'operazione $fxyz$ denota $((fx)y)z$ (quando esiste), ecc.

Assioma 4. *K e S sono operazioni, e si ha*

1. *$\forall x\,.Qop\,Kx$ e $\forall y\,.Kxy = x$;*
2. *$Qop\,f\ \&\ Qop\,g \implies Qop\,Sf\ \&\ Qop\,Sfg\ \&$*
   $\&\ Sfgx = y \iff \exists h, z\,(fx = h\ \&\ gx = z\ \&\ hz = y)$
   (brevemente $Sfgx = (fx)(gx)$).

Nota: con iterate applicazioni di S e K si può costruire ogni operazione "λ-definibile", in particolare i combinatori
$B = S(KS)K$ tale che $Bfgx = y \iff f(gx) = y$;
$C = S(BBS)(KK)$ tale che $Cfyx = z \iff fxy = z$;
$W = CS(SKK)$ tale che $Wfx = y \iff fxx = y$;
(ove f, g sono operazioni e x, y, z oggetti qualsiasi).

Assioma 5. *$Qcoll$ è la qualità di essere una collezione; $Rcoll, Rincl$ sono le relazioni binarie di appartenenza e inclusione. Si ha*

1. *$Rcoll\,x, y \implies Qcoll\ x$;*
2. *$Rincl\,C, D \iff Qcoll\,C\ \&\ Qcoll\,D\ \&\ \forall x\,(Rcoll\ C, x \implies Rcoll\ D, x)$;*
3. *$Rincl\ C, D\ \&\ Rincl\ D, C \implies C = D$.*

Notazione: Se C, D sono collezioni $x \in C$ sta per $Rcoll\,C, x$ e $C \supseteq D$, $D \subseteq C$ stanno per $Rincl\,C, D$.

Assioma 6. *V è una collezione, $Sing$ e $Compl$ sono operazioni tali che*

1. *$x \in V$ per ogni x;*
2. *per ogni x, $Sing\, x$ è una collezione tale che $y \in Sing\, x \iff x = y$;*
3. *se C, D sono collezioni $Compl\, C$ è un'operazione, $(Compl\, C)D$ è una collezione e si ha $x \in (Compl\, C)D \iff x \in C \;\&\; x \notin D$.*

Assioma 7. *$Qpred$ è la qualità di essere un predicato.*

1. *$Qpred\, p \Longrightarrow Qop\, p \;\&\; \forall x\, .\, Qpred\, (px)$;*
2. *$Qpred\, p \Longrightarrow Qpred\, (Kp) \;\&\; Qpred\, (Cp) \;\&\; Qpred\, (Wp)$.*

Assioma 8. *$Non, Et, Vel, Exist, Univ$ sono operazioni definite per ogni predicato p e tali che*

1. *$Non\, p = \neg p$ è un predicato e per ogni x si ha $(\neg p)x = \neg(px)$;*
2. *$Et\, p$ è un'operazione definita per ogni predicato q, $(Et\, p)q = p \wedge q$ è un predicato e per ogni x si ha $(p \wedge q)x = (px) \wedge (qx)$;*
3. *$Vel\, p$ è un'operazione definita per ogni predicato q, $(Vel\, p)q = p \vee q$ è un predicato e per ogni x si ha $(p \vee q)x = (px) \vee (qx)$;*
4. *$Exist\, p = \exists p$ è un predicato e per ogni x si ha $(\exists p)x = \exists((Cp)x)$;*
5. *$Univ\, p = \neg p$ è un predicato e per ogni x si ha $(\forall p)x = \forall((Cp)x)$.*

Assioma 9. *$Qprop$ è la qualità di essere una proposizione:*

1. *$Qprop\, p \Longrightarrow Qpred\, p \;\&\; \forall x\, (px = p)$;*
2. *$Qprop\, p \;\&\; Qprop\, q \Longrightarrow Qprop\, (p \wedge q) \;\&\; Qprop\, (p \vee q) \;\&\; Qprop\, \neg p$;*
3. *$Qpred\, p \Longrightarrow \forall x\, (Qprop\, (px) \iff Cp = Kp)$;*
4. *$Qpred\, p \;\&\; Cp = Kp \Longrightarrow Qprop\, \exists p \;\&\; Qprop\, \forall p$.*

Assioma 10. *$Qver$ è la qualità di essere una proposizione vera:*

1. *per ogni p $\;Qver\, p \Longrightarrow Qprop\, p$;*
2. *per ogni p, q $\;Qver\, (p \wedge q) \iff Qver\, p \;\&\; Qver\, q$;*
3. *per nessun p $\;Qver\, (p \wedge \neg p)$;*
4. *per ogni predicato p e per ogni x si ha $Qver\, (px) \Longrightarrow Qver\, \exists p$;*
5. *per ogni predicato p e per ogni x si ha $Qver\, \forall p \Longrightarrow Qver\, (px)$.*

Assioma 11. *Per ogni relazione ternaria r esiste il predicato "r" tale che*

1. *"r"$xyz =$ "$rxyz$" è una proposizione per ogni x, y, z;*

2. *Qver "$rxyz$" se e solo se x, y, z sono nella relazione r;*

3. *Qver $\neg$ "$rxyz$" se e solo se x, y, z non sono nella relazione r.*

Notazione: Se f è un'operazione "$fx = y$" sta per "$Rop\, f, x, y$", se r è una relazione binaria "$r\, x, y$" sta per "$Rrelb\, r, x, y$", se q è una qualità "$q\, x$" sta per "$Rrelb\, Rqual, q, x$", e cosí via per tutte le specie di oggetti "qualificati".