Un'assiomatizzazione della genetica all'interno della teoria dei fondamenti di Ennio De Giorgi*

Lodovico Galleni e Marco Forti
Centro Interdisciplinare per lo Studio dei Sistemi Complessi
Università di Pisa, Italy.
LGalleni@agr.unipi.it, forti@dma.unipi.it

January 21, 2023

Abstract

In this paper we present a temptative axiomatization of some concepts of Genetics within the general axiomatic framework for Theoretical Biology, introduced by the authors in [**?**] and based on the primitive concepts of *quality, relation, operation*, and *collection*. This framework is developed according to the foundational programme of Ennio De Giorgi, which aims to accomodate the basic principles of any "sufficiently clear" scientific theory. Here it allows to analyze in a natural way the basic notions of *gene* and *morphological quality*, introducing suitable relations and operations describing their mutual interrelations. In particular the Mendel's Laws and other important aspects of sexual reproduction are studied in this context, together with the relation connecting the *Mendelian* notion of gene with its *molecular* counterpart in the cell, according to our general treatment of the connections between *abstract biological objects* and their *concrete spatiotemporal instantiations* (see [**?**]).
Keywords: Gene, Mendel's Laws, Morphological quality, Morphogenetic operation.

Introduzione

Questo articolo si inserisce nel programma di ricerca sui fondamenti della Matematica e delle altre scienze, sviluppato a partire dagli anni ottanta nel seminario diretto da Ennio De Giorgi presso la scuola Normale Superiore di Pisa, e proseguito da vari ricercatori dopo la sua morte nel 1996 (cfr. [**?**, **?**, **?**]). In questo programma i fondamenti sono intesi non tanto a fornire una base solida e non problematica alle varie scienze, quanto piuttosto a creare un quadro assiomatico in cui l'attività scientifica si possa sviluppare naturalmente, senza

*Work partially supported by MURST Cofin grant "Logica Matematica e Applicazioni".

vincoli artificiosi, ed i vari concetti trovino una presentazione semplice e chiara, che permetta una seria analisi da parte degli studiosi interessati e favorisca al contempo un proficuo confronto interdisciplinare.

I principi generali che ispirano e caratterizzano il programma fondazionale di Ennio De Giorgi sono i seguenti:

- *non-riduzionismo*: ci sono oggetti di molte specie differenti, che non possono essere ridotti ad uno o due tipi fondamentali se non perdendo buona parte delle loro caratteristiche essenziali;

- *apertura*: ogni nozione sufficientemente chiara dovrebbe essere innestabile nella teoria in modo naturale, senza dover ricorrere a codifiche artificiose e senza modificarne gli assiomi fondamentali;

- *autodescrizione*: le principali proprietà, relazioni ed operazioni considerate nella teoria sono a loro volta oggetti dello stesso livello nella teoria;

- *assiomatizzazione semiformale*: le varie teorie scientifiche, nonché la stessa teoria fondazionale generale si presentano nella forma di assiomi esprimenti i fatti principali sugli oggetti primitivi sotto indagine, formulati nel modo chiaro e rigoroso tipico della matematica classica, senza ricorrere ai linguaggi totalmente formalizzati della moderna logica matematica.

In tale ottica, gli autori stanno elaborando un quadro assiomatico adatto allo studio di alcuni concetti fondamentali della Biologia, e proponendo all'attenzione ed alla critica della comunità scientifica assiomi che esprimono le attuali conoscenze di alcuni importanti fatti biologici (cfr. [**?**, **?**, **?**, **?**]). In questo articolo si affronteranno alcuni problemi della genetica classica, in particolare le connessioni tra il concetto mendeliano di gene e le sue moderne interpretazioni molecolari, i rapporti tra i geni e le qualità morfologiche che essi controllano e, più in generale, le principali operazioni coinvolte nell'ereditarietà, a partire da un'assiomatizzazione delle leggi di Mendel. Questo lavoro non pretende certo di superare, e nemmeno di comprendere completamente, i precedenti tentativi di studio assiomatico della genetica: qui non possiamo neppure accennare ad un serio ed approfondito confronto con le precedenti pubblicazioni sull'argomento, che, pur non numerosissime, rappresentano tuttavia il principale corpus assiomatico di tutta la Biologia (vedi [**?**, **?**, **?**, **?**] e, per una discussione comparativa, [**?**]); tale confronto esula dagli scopi del presente lavoro, e supererebbe largamente, comunque, le possibilità degli autori.

Nello spirito di tutti i lavori che traggono la loro origine dal programma fondazionale di Ennio De Giorgi, ci auguriamo che questo articolo possa suscitare reazioni critiche od anche semplici commenti da parte di studiosi delle differenti discipline biologiche. Gli autori intendono intanto esprimere la loro gratitudine particolare a Furio Honsell per utili suggerimenti, nonché a Paolo Freguglia, Martino Rizzotti, Vieri Benci, Felicita Scapini e Paola Iacopetti per alcune interessanti discussioni.

1 Il quadro assiomatico generale

Poiché ogni scienza considera oggetti qualitativamente diversi e studia varie relazioni tra tali oggetti, sembra opportuno scegliere, come premessa generale alla trattazione assiomatica di tutte le discipline scientifiche, un semplice sistema basato sui concetti primitivi di "avere una data qualità" ed "essere in una data relazione con ...", introducendo contemporaneamente alcune qualità e relazioni "fondamentali", che costituiscano una base solida e flessibile, su cui innestare qualità e relazioni più specifiche delle singole discipline. In particolare le qualità saranno usate per individuare i differenti *tipi di oggetti* considerati (biologici e no), mentre le relazioni e le altre nozioni primitive introdotte successivamente saranno usate per studiare e descrivere le interazioni di tali oggetti tra di loro nel tempo.

Pertanto introduciamo come *primitive*, cioè non riducibili ad altre, le seguenti nozioni:

- *l'oggetto q è una qualità*;
- *l'oggetto r è una relazione binaria*;
- *l'oggetto s è una relazione ternaria*;
- *l'oggetto t è una relazione quaternaria*;[1]
- *l'oggetto x ha la qualità q* (denotato qx);
- *gli oggetti x, y stanno nella relazione binaria r* (denotato $r\ x, y$);
- *gli oggetti x, y, z stanno nella relazione ternaria s* (denotato $s\ x, y, z$);
- *gli oggetti x, y, z, w stanno nella relazione quaternaria t* (denot. $t\ x, y, z, w$).

Seguendo lo schema di [**?**], cominciamo con l'isolare una base di partenza che utilizza i concetti primitivi "pre-matematici" di cui sopra, fornendone un'assiomatizzazione minimale ma fortemente autodescrittiva; introduciamo poi man mano altre nozioni fondamentali, fra le quali anzitutto quelle di *collezione, insieme* e *operazione*, che sono universalmente utilizzate nelle varie scienze.

Un serio problema, che si pone subito nell'innestare le scienze naturali in un simile quadro fondazionale, è dato dal fatto che tale quadro, traendo origine dallo studio di Matematica, Logica e Informatica, è predisposto per innestare naturalmente gli oggetti astratti "eternamente invarianti" tipici di tali discipline. Ben pochi tentativi sono stati fatti per trattare la "variabilità" in un tale

[1] Non escludiamo ovviamente che vi possano essere relazioni più complesse delle relazioni binarie, ternarie e quaternarie: semplicemente non le consideriamo qui, in quanto non dovremo farne uso nel seguito. Di fatto vi è una duplice ragione per fermarsi alle relazioni quaternarie: da una parte non pare facile incontrare relazioni che si presentino naturalmente come quinarie o più complesse; dall'altra, pur potendo fare in modo da utilizzare soltanto qualità e relazioni binarie, considerando le relazioni di arietà maggiore come agenti su (un'opportuna codifica delle) n-uple (come abitualmente si fa nelle teorie formali della Matematica), riteniamo decisamente contrario ai nostri principi informatori dover usare codifiche artificiali per innestare nozioni così naturali come quelle di operazione (semplice e binaria), che verranno introdotte qui sotto proprio mediante l'uso di una relazione ternaria e di una quaternaria.

contesto, senza ricorrere a parametrizzazioni più o meno artificiose: possiamo forse citare l'assiomatizzazione del concetto di *variabile* della Fisica Matematica classica proposta in [**?**] e l'introduzione di *qualità contingenti* e di altre nozioni modali in [**?**], che poco aiutano, tuttavia, a superare le difficoltà insite in ogni tentativo di assiomatizzazione della Biologia (vedi [**?**, **?**]). Un primo tentativo di considerare gli oggetti biologici come *oggetti variabili* è stato abbozzato in [**?**] (vedi anche [**?**]); ne riprendiamo anche qui i primi assiomi, sperandodi suscitare un dibattito che possa fornire utili spunti per assiomatizzazioni più ricche ed adeguate all'importanza di queste tematiche.

1.1 Qualità e relazioni fondamentali

Per comodità del lettore riprendiamo i principali assiomi che costituiscono il quadro generale, cominciando con l'introdurre quattro qualità *classificanti Qqual, Qrelb, Qrelt, Qrelq*, corrispondenti ai tipi fondamentali di oggetti suintrodotti e tre *relazioni fondamentali Rqual, Rrelb, Rrelt*,[2] che descrivono il comportamento di qualità e relazioni.

Postuliamo quindi

Assioma 1 (Qualità fondamentali, vedi [**?**] Ax. Q)

Qqual, Qrelb, Qrelt, Qrelq sono qualità disgiunte (cioè nessun oggetto ha simultaneamente due di esse) e si ha:
i) x è una qualità se e solo se Qqual x;
ii) x è una relazione binaria se e solo se Qrelb x;
iii) x è una relazione teraria se e solo se Qrelt x;
iv) x è una relazione quaternaria se e solo se Qrelq x.

Assioma 2 (Relazioni fondamentali, vedi [**?**] Ax. R.1-3)

1. *Rqual è una relazione binaria e si ha:*
   i) Rqual x, y implica Qqual x;
   ii) se q è una qualità, allora si ha Rqual $q, x \Longleftrightarrow qx$.

2. *Rrelb è una relazione teraria e si ha:*
   i) Rrelb x, y, z implica Qrelb x;
   ii) se r è una relazione binaria, allora si ha Rrelb $r, x, y \Longleftrightarrow r\ x, y$.

3. *Rrelt è una relazione quaternaria:*
   i) Rrelt x, y, z, w implica Qrelt x;
   ii) se s è una relazione ternaria, allora si ha Rrelt $s, x, y, z \Longleftrightarrow s\ x, y, z$.

Per altri assiomi generali che governano le qualità e le relazioni fondamentali esprimendone il comportamento naturale rimandiamo a [**?**]. Sottolineiamo soltanto che *non* abbiamo postulato l'*estensionalità* per qualità e relazioni, per meglio aderire al loro carattere prettamente descrittivo, e quindi *intensionale*.[3]

[2] Per favorire la comprensione del significato inteso per gli oggetti particolari via via introdotti useremo nomi *suggestivi*, che contengono frammenti delle corrispondenti parole *latine*: p.es. le qualità avranno prefisso *Q-* e le relazioni *R-*,mentre le qualità e le relazioni concernenti qualità o relazioni avranno abitualmente suffisso o infisso *qual* e *rel* rispettivamente.

[3] Si noti che non abbiamo introdotto una relazione *Rrelq* che descrive il comportamento

1.2 Operazioni, collezioni e insiemi

Come già in [**?**, **?**], utilizzeremo per la nostra assiomatizzazione della Genetica altre due nozioni fondamentali, che occorrono di fatto nella sistemazione dei fondamenti di qualunque scienza: quelle di *operazione* e di *collezione* (o insieme). Seguendo lo schema generale per l'innesto di nuove nozioni nella nostra teoria, utilizzeremo opportune qualità per *caratterizzare* i nuovi tipi di oggetti considerati ed opportune relazioni per *collegarli* fra loro ed agli oggetti già introdotti. Naturalmente quando avremo a nostra disposizione anche operazioni e collezioni, esse saranno a loro volta utilizzate per i successivi innesti, mantenendo però sempre il principio guida che gli oggetti "più fondamentali" (e quindi anche meno "maneggevoli" e più "delicati") sono le qualità e le relazioni.

La nozione di operazione intende rappresentare l'idea di un oggetto (processo) che *opera* su uno o due oggetti assegnati e produce eventualmente un *risultato*. Introduciamo dunque le qualità *Qops* e *Qopb* (di essere un'operazione semplice e, rispettivamente, binaria) insieme alla relazione ternaria *Rops* e alla relazione quaternaria *Ropb* che descrivono rispettivamente l'azione delle operazioni semplici e binarie.[4] La *funzionalità* delle operazioni è espressa dalle clausole ii) dell'assioma seguente, che garantiscono l'*univocità* delle relazioni *Rops* e *Ropb*. Postuliamo dunque

Assioma 3 (Innesto delle operazioni, vedi [**?**] Ax. O.1-2)

1. *Qops è la qualità di essere un'operazione semplice, Rops è una relazione ternaria tale che:*
   i) Rops x, y, z *implica Qops* x*;*
   ii) se si ha simultaneamente Rops x, y, z *e Rops* x, y, w*, allora* $z = w$*.*

2. *Qopb è la qualità di essere un'operazione binaria, Ropb è una relazione quaternaria tale che:*
   i) Ropb x, y, z, w *implica Qopb* x*;*
   ii) se si ha simultaneamente Ropb x, y, z, w *e Ropb* x, y, z, t*, allora* $w = t$*.*

Per un'assiomatizzazione ricca e potente delle operazioni rimandiamo a [**?**]; qui ci limitiamo a richiamare le notazioni usuali, giustificate dagi assiomi precedenti:

- quando f un'operazione semplice, $y = fx$ sta per *Rops* f, x, y;
- quando g un'operazione binaria, $z = gxy$ sta per *Ropb* g, x, y, z.

delle relazioni quaternarie, perché questa sarebbe una relazione quinaria, ed avremmo così dovuto proseguire indefinitamente nell'introduzione di relazioni sempre più complesse, come ad esempio in [**?**]. Ne risulta la mancanza di una descrizione interna del comportamento delle relazioni quaternarie, che appare in contrasto col principio generale di autoriferimento: in realtà tale lacuna può essere colmata agevolmente in vari modi (vedi [**?**, **?**]).

[4] Come nel caso delle relazioni, non escludiamo affatto che vi siano operazioni che agiscono su *più di due* argomenti alla volta: non le abbiamo introdotte qui solo perché non le utilizzeremo nel seguito; d'altra parte una delle ragioni principali per cui siamo arrivati a considerare fin dall'inizio anche relazioni quaternarie è stata proprio l'esigenza di introdurre in modo naturale le operazioni binarie mediante la relazione *Ropb*.

Il concetto di collezione intende catturare l'idea generale soggiacente le definizioni di classe e insieme date da Frege e Cantor, cioè l'idea di "aggregazione in un tutto unico di differenti oggetti di qualunque tipo". Ne segue che le collezioni sono *estensionali* per natura, nel senso che dipendono soltanto dagli oggetti che loro appartengono.[5] Introduciamo quindi la qualit *Qcoll* (di essere una collezione) e due relazioni binarie che governano il comportamento delle collezioni: *Rcoll* (l'*appartenenza* fra collezioni e oggetti) e *Rincl* (l'*inclusione* fra collezioni). Introduciamo anche quattro collezioni fondamentali: V (la collezione *universale*), $Coll$ (la collezione di tutte le *collezioni*), Ins (la collezione di degli *insiemi*) e $\emptyset$ (l'insieme *vuoto*). Postuliamo dunque

Assioma 4 (Innesto delle collezioni, vedi [**?**] Ax. C.1-2)

1. *Qcoll è la qualità di essere una collezione; Rcoll e Rincl sono relazioni binarie tali che:*
   i) Rcoll x, y *implica Qcoll* x*;*
   ii) se C, D *sono collezioni si ha Rincl* C, D *se e solo se Rcoll* D, x *implica Rcoll* C, x*);*
   iii) se C, D *sono collezioni tali che Rincl* C, D *e Rincl* D, C *valgono simultaneamente, allora* $C = D$*.*

2. $V, \emptyset, Coll$ *sono collezioni tali che:*
   i) per ogni oggetto x*,* $x \in V$ *e* $x \notin \emptyset$*;*
   ii) $x \in Coll$ *se e solo se Qcoll* x*.*

3. Ins *è una sottocollezione di Coll, i cui elementi sono gli insiemi.*

Quando X, Y sono collezioni ci serviamo delle notazioni usuali, e cioè

- $x \in X$ sta per *Rcoll* X, x; diremo in tal caso che x appartiene a (o un elemento di) X; se invece non si ha *Rcoll* X, x scriveremo $x \notin X$;
- scriveremo $X \supseteq Y$ o $Y \subseteq X$ (e diremo che X include Y, o che Y è una sottocollezione di X) se si ha *Rincl* X, Y.

Come c'era da aspettarsi, i ben noti paradossi impediscono di introdurre le normali operazioni insiemistiche pretendendo che si possano liberamente applicare a tutte le collezioni; per questa ragione abbiamo selezionato, mediante la collezione Ins, gli *insiemi* intesi come le usuali collezioni "maneggevoli e controllabili" della matematica ordinaria e delle scienze applicate, su cui si può operare liberamente. Di fatto gli insiemi che considereremo in questo articolo sono finiti, mentre invece useremo alcune collezioni che, pur non essendo necessariamente infinite, sono però piuttosto "grandi" e abbastanza "indeterminate" da non essere convenientemente assimilabili agli insiemi da noi introdotti, che sono invece "meglio precisati". Lo sviluppo di una ricca ed articolata teoria delle collezioni e insiemi si può trovare in [**?**, **?**]; qui ci limitiamo ad introdurre

[5] Invece non abbiamo imposto l'estensionalità alle operazioni, perché non vogliamo escludere la possibilità che vi siano operazioni che agiscono sugli *stessi* oggetti e danno sempre gli *stessi* risultati, ma sono *diverse* tra loro (intuitivamente operano secondo procedure differenti, ancorché equivalenti).

le operazioni *Compl* (complemento relativo) e *Sing* (singoletto), e a postulare un assioma che da una parte assicura il complemento relativo (e quindi anche l'unione e l'intersezione) di due collezioni, e dall'altra garantisce che tutte le collezioni (intuitivamente) finite sono insiemi. Altre operazioni, collezioni ed insiemi necessarie per gli sviluppi di questo articolo saranno introdotte al momento opportuno.

Assioma 5 (Operazioni su collezioni e insiemi, vedi [**?**] Ax. O.1-2)

1. *Compl è un'operazione binaria: se X, Y sono collezioni, Compl $XY = X \setminus Y$ esiste ed è una collezione contenente tutti e soli quegli elementi di X che non appartengono a Y.*

2. *Sing è un'operazione semplice: per ogni oggetto x, Sing $x = \{x\}$ esiste ed è un insieme il cui unico elemento è x.*

3. *L'unione di due insiemi e il complemento di una collezione relativamente ad un insieme sono insiemi.*

1.3 Oggetti variabili

Partiremo dall'idea intuitiva che gli oggetti delle scienze naturali (ad esempio la *Terra* o un ben preciso cane come l'ispettore *Rex*) hanno una natura *individuale permanente* che comprende e va oltre i singoli concreti oggetti (opportuni aggregati di particelle) che li identificano in ogni istante. L'idea è che per certi valori di opportuni parametri ogni oggetto naturale ha un "corrispettivo concreto" (la *Terra* è un aggregato di ben determinate molecole, l'ispettore *Rex* di ben determinate cellule, ecc.): al variare del *parametro di stato* il corrispettivo concreto *cambia* (alcuni atomi sono eliminati o sostituiti da altri, alcune cellule muoiono ed altre nascono, ecc.), mentre l'oggetto naturale è considerato ancora *lo stesso*.

Naturalmente non basta considerare la dipendenza da istanti od intervalli temporali, perché spesso anche determinazioni spaziali, e più in generale diversi tipi di dati o parametri, possono essere rilevanti per gli oggetti considerati. Introdurremo quindi una grande indeterminata collezione $\mathcal{S}$ contenente tutti i tipi di parametri (*stati dell'universo*) che andranno a comporre gli "spazi delle fasi" che considereremo nelle varie teorie da assiomatizzare, a cominciare dalla Biologia. A tal fine è necessario introdurre una nuova relazione fondamentale *Rinst* che correli ogni *oggetto variabile* con gli *stati* nei quali esiste una sua *instanziazione* e con il corrispondente *oggetto concreto*. Introduciamo dunque la qualità *Qvar* di essere un oggetto variabile e postuliamo:

Assioma 6 (Oggetti variabili e loro instanziazioni, vedi [**?**] Ax. V.1)
Qvar è la qualità di essere un oggetto variabile, $\mathcal{S}$ è la collezione di tutti gli stati e Rinst è la relazione ternaria di instanziazione. Si ha:

1. *se Rinst x, y, z allora Qvar x e $y \in \mathcal{S}$;*

2. *se Rinst x, y, z e Rinst x, y, w valgono simultaneamente, allora $w = z$.*

Se X è un oggetto variabile, $s \in \mathcal{S}$ è un parametro di stato e z è un oggetto per cui vale $Rinst\ X, s, z$, allora z è univocamente determinato (per la clausola 2 dell'assioma precedente) e verrà denotato abitualmente con X_s e chiamato *l'instanziazione di X allo stato s*. Quando X ha un'instanziazione X_s allo stato s diremo semplicemente che *X esiste in s*, ed anche che *X_s è X allo stato s*.

Non possiamo ovviamente sviluppare qui una teoria generale dei rapporti tra un oggetto variabile e le sue instanziazioni, né possiamo descrivere le varie relazioni che connettono i diversi stati: una tale teoria è tuttora ben lungi dall'essere sufficientemente indagata e sviluppata. Ci limitiamo qui a considerare un caso tipico, molto frequente in Biologia, e cioè quello di un'operazione (astratta) che agisce su un oggetto variabile e ne produce un altro. Ci sembra naturale assumere che un'operazione di questo tipo possa essere "decomposta" in un opportuno numero di operazioni (concrete) che, in opportuni stati, agiscono su(lle instanziazioni di) certi oggetti, producendo (instanziazioni degli stessi oggetti in nuovi stati, od anche) nuovi oggetti. L'unica condizione generale che sembra imporsi è che il primo oggetto sia (un'instanziazione del)l'argomento dell'operazione astratta e l'ultimo sia (un'instanziazione del) risultato corrispondente. Proponiamo quindi il seguente assioma:

Assioma 7 (Decomposizione di operazioni su oggetti variabili, vedi [**?**] Ax. V.2) *Se F è un'operazione e X, Y sono oggetti variabili tali che $FX = Y$, allora esistono operazioni $f_1, \ldots, f_n$, oggetti variabili $Z^1, \ldots, Z^n$, e stati $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{S}$ tali che $f_i Z^i_{s_i} = Z^{i+1}_{s_i}$ per $i = 1, \ldots, n-1$.*

Inoltre si ha $X = Z^1$ e $Y = Z^n$.

Le operazioni $f_1, \ldots, f_n$, saranno chiamate *componenti* dell'operazione F.

Per semplicità abbiamo trattato solo il caso di operazioni semplici, ma ovviamente si intende assumere l'assioma anche per operazioni binarie; anzi, va tenuto conto del fatto che anche alcune componenti di un'operazione semplice possono essere binarie (e viceversa), a seconda dei casi. Assiomi analoghi potrebbero essere formulati anche per relazioni o qualità di oggetti variabili; appare inoltre necessario specificare relazioni appropriate fra gli stati considerati in questi assiomi. In questo breve cenno non ci inoltriamo in tali problematiche, riservandoci di introdurre le necessarie specificazioni al momento in cui se ne presenterà concretamente la necessità.

2 Morfologia e genetica negli oggetti viventi

Per introdurre i primi elementi della Genetica dobbiamo anzitutto richiamare alcuni dei concetti biologici assiomaticamente considerati in [**?**]. Ovviamente non possiamo qui riesaminare le problematiche ispiratrici e/o originate dalle nostre scelte, per le quali rimandiamo a [**?**, **?**, **?**]: ci limitiamo a richiamare le nozioni biologiche coinvolte negli sviluppi di questo articolo e gli assiomi che le governano secondo l'impostazione di [**?**].

2.1 Oggetti biologici e viventi

Seguendo [**?**], possiamo partire dall'asserto tautologico che la Biologia è la scienza che studia gli "oggetti biologici". Perciò introduciamo la qualità *Qbiol* di essere un *oggetto biologico*, senza ovviamente pretendere di darne una definizione, implicita od esplicita, sulla base di nozioni "più primitive". Cominciamo invece col rilevare che ogni oggetto biologico è sempre coinvolto in due relazioni fondamentali: è stato generato da qualche oggetto ed è parte di qualche altro oggetto complesso, oltre ad essere a sua volta composto di parti. Perciò introduciamo le relazioni

- *Rgen*: la più generale relazione fra *generante e generato*;
- *Rcomp*: la più generale relazione fra *oggetto complesso e sua componente.*

Postuliamo quindi

Assioma Bio.1 (Assiomi 1-4 di [**?**])

1. *Qbiol è la qualità di essere un oggetto biologico.*
2. *Rgen è una relazione binaria: se Qbiol x allora esiste y tale che Rgen x, y.*
3. *Rcomp è una relazione binaria: se Qbiol x allora esistono y, z tali che Rcomp x, y e Rcomp z, x.*

Il significato inteso per *Rgen* x, y è che y è stato generato da x, mentre *Rcomp* x, y sta a significare che y è un componente (una parte) di x. *Rgen* è la *più generale* relazione di generazione, e nessun particolare "processo di generazione" è specificato. Nel seguito considereremo le *operazioni di generazione*, che concretano tale relazione nel caso degli *oggetti viventi*. Analogamente anche la relazione *Rcomp* è intesa nel senso più generale, e non dà informazioni precise su come le varie parti sono organizzate e si correlano all'oggetto complesso: non avremo qui l'opportunità di approfondire questo problema.

Introduciamo ora gli *oggetti viventi* mediante la qualità *Qviv* (Lat. *vivens*), senza ovviamente pretendere di darne una completa caratterizzazione assiomatica. Come fondamentale caratteristica abbiamo introdotto in [**?**] solo il fatto che la relazione di generazione è realizzata attraverso specifiche *operazioni di generazione*, raccolte nella collezione *Opgen*.

Assioma Bio.2 Assiomi 5-6 di [**?**])

Qviv è la qualità di essere un oggetto vivente, Opgen è una collezione di operazioni variabili (le operazioni di generazione) e si ha:

1. *se X, Y sono oggetti viventi, $G \in$ Opgen e GX (o GXY) esiste, allora è un insieme di oggetti viventi;*
2. *se $GX = \{Z_1, ..., Z_n\}$ (o rispettivamente $GXY = \{Z_1, ..., Z_n\}$) allora Rgen X, Z_i (e rispettivamente anche Rgen Y, Z_i) per $i = 1, \ldots, n$.*

3. *Se X, Y sono oggetti viventi e si ha Rgen X, Y, allora esiste $G \in Opgen$ tale che $GX = Y$ (o eventualmente $GXZ = Y$ per qualche Z).*

Abbiamo preso un *insieme* come risultato di un'operazione di generazione perché di norma ognuna di esse produce più di un oggetto vivente (ma talvolta può non produrne alcuno). Ogni tale operazione G rappresenta un ben preciso processo di riproduzione, che si può articolare in componenti $g_1, \ldots, g_n$ che rappresentano le diverse azioni concrete eseguite in opportuni stati per arrivare alla generazione di nuovi oggetti viventi. Noi non analizzeremo questi processi, se non in modo assai superficiale, in connessione con le Leggi di Mendel (vedi sotto).

2.2 Geni e morfogenesi

Il primo concetto fondamentale della genetica è ovviamente quello di *gene*. Poiché per una trattazione assiomatica non è necessario specificare concretamente un "supporto fisico" per tale concetto, ci limitiamo per ora ad introdurre una (grande e indeterminata) collezione *Gen*, intesa come la collezione dei geni. È ovvio che un gene è un oggetto biologico, ma, almeno in questo primo approccio, non occorre cosiderarlo il gene come sequenza di basi di DNA o RNA. Questo ci permette di utilizzare il concetto di gene senza darne, almeno per ora una definizione troppo stringente e impegnativa. Per questa ragione preferiamo introdurre una *collezione Gen* di geni piuttosto che la *qualità Qgen* di essere un gene: questa, essendo un oggetto intensionale dovrebbe sottintendere una qualche interpretazione biologica fissata. Per esempio, assumere che un gene sia necessariamente una stringa di DNA taglierebbe fuori i geni del grande gruppo dei virus a RNA. Ovviamente potremmo fin d'ora introdurre una "qualità composta" comprendente i due casi: non vogliamo però escludere definitivamente la possibilità che in futuro si scoprano altri codici che convogliano informazione biologica. Per di più, dato che in questo lavoro siamo principalmente interessati alle leggi di Mendel, ci concentreremo sui geni nucleari, rimandando ad un successivo lavoro il tentativo di assiomatizzare i geni degli organelli citoplasmatici. Quindi a questo stadio non ci occorre caratterizzare completamente la collezione *Gen*: assumiamo soltanto che contenga i geni *nucleari autosomali* della particolare collezione di oggetti viventi che hanno *zigote diploide e gameti aploidi*.

Anche nel caso più generale è comunque opportuno assiomatizzare il concetto che un certo gene è presente in un dato vivente (magari senza impegnarci in una identificazione troppo precisa). Introduciamo quindi una relazione *Rgloc* che collega un gene con una parte di un determinato oggetto vivente e proponiamo l'assioma

Assioma Gen.1

1. *Gen è una collezione, detta la collezione dei geni. Se $x \in Gen$ allora Qbiol x.*

2. *Rgloc è una relazione binaria. Se si ha Rgloc g, x allora $g \in Gen$ ed esiste un oggetto vivente v tale che Rcomp v, x.*

Diremo che il gene g è presente nel vivente v se esiste un x tale che si abbia $Rgloc\ g, x$ e $Rcomp\ v, x$. Naturalmente, in generale, gli x che localizzano un dato gene g in un vivente v saranno parecchi, di solito almeno uno per cellula. Nei lavori di Mendel, per esempio, nel considerare, tra l'altro, il colore del seme del pisello si postula che vi sia un gene g che controlla il colore giallo. Chiaramente si avrà $g \in Gen$, ma in ogni cellula dei piselli gialli vi sarà almeno una sequenza x di DNA che rappresenta la localizzazione del gene g in tale cellula. Siamo quindi giunti al punto di considerare i rapporti tra geni e *qualità morfologiche*.

Già in [**?**] e poi in [**?**] abbiamo introdotto una grande collezione $Morph$, cui appartengono tutte le qualità morfologiche q che consideriamo o potremmo considerare. Le qualità morfologiche sono qui intese nel senso più generale, come caratteristiche fisiche osservabili e descrivibili degli oggetti viventi, anche se non necessariamente legate all'aspetto. Chiaramente il progresso delle conoscenze biologiche amplia continuamente la collezione $Morph$, che però può essere tenuta sotto controllo in ogni dato contesto.

Una delle scoperte fondamentali della Genetica è il fatto che le due collezioni Gen e $Morph$ sono collegate da una relazione: ogni qualità morfologica è controllata da geni, e viceversa ogni gene controlla qualche qualità morfologica (usualmente in combinazione con altri). Introduciamo dunque la relazione fondamentale RGM che collega fra loro la collezione Gen dei geni e quella delle caratteristiche morfologiche $Morph$. Non postuliamo né la funzionalità né l'iniettività della relazione RGM; in effetti può capitare che la relazione tra gene e caratteristica morfologica sia univoca, cioè ad un gene corrisponde una sola caratteristica morfologica, ed anche che viceversa una caratteristica sia correlata ad un solo gene, ma questi sono casi piuttosto rari: molto piú frequenti sono invece le situazioni in cui ad una caratteristica morfologica corrispondono piú geni e viceversa piú caratteristiche morfologiche corrispondono ad uno stesso gene.

Ci sembra importante sottolineare che, come esplicitamente affermato in [**?**, **?**], la collezione $Morph$ è da intendersi in senso estremamente ampio e comprende in particolare anche caratteristiche morfologiche concernenti la struttura di stringhe di DNA. Anche se, come già più volte sottolineato, non vogliamo per ora esaminare la natura biochimica del gene, tuttavia la presenza di una data sequenza di basi di DNA è certamente da considerarsi una qualità morfologica, e quindi la relazione RGM acquista in questo caso un significato "autoreferenziale", in quanto sarebbe concepibile localizzare un gene mediante quella sequenza e metterlo nella relazione $Rgloc$ con ogni tale sequenza presente in un dato vivente: si potrebbe allora mettere quel gene nella relazione RGM proprio con la qualità di presentare quella sequenza.

Questo tipo di autoreferenzialità permette di assumere senza problemi che ogni gene controlla, almeno in parte, qualche qualità morfologica:

Assioma Gen.2 *RGM e' una relazione binaria. Se vale $RGM\ x, y$ allora $x \in Gen$, $y \in Morph$ e il gene x è collegato alla qualità morfologica y. Inoltre, per ogni $g \in Gen$ esiste $q \in Morph$ tale che $RGM\ g, q$.*

Non abbiamo invece postulato che *ogni* qualità morfologica sia collegate ad uno o più geni della collezione Gen: non ci sembra il caso di pronunciar-

ci ora in tal senso, onde mantenere la teoria aperta ad estensioni che siano eventualmente incompatibili con un collegamento così rigido, per esempio anche l'individuazione di tipi di geni che mal si adattino ad essere inclusi in tale collezione.

Osserviamo che, come nel caso delle altre relazioni fondamentali della Biologia *Rgen* e *Rcomp* introdotte sopra, la relazione RGM esprime soltanto l'esistenza di un qualche generico legame fra certi geni e certe qualità; per comprendere meglio il significato biologico di tale legame procederemo a considerare piú specificamente l'*azione* che svolgono i geni in tale ambito. Come già fatto in [**?**] per il caso della relazione di generazione fra viventi, per instanziare concretamente la relazione generale RGM è opportuno introdurre delle operazioni che rappresentino i processi concreti mediante i quali uno o piú geni influiscono su una determinata qualità morfologica. Sono le operazioni che permettono l'*espressione* del gene e le chiameremo *operazioni morfogenetiche*: esse costituiranno la collezione $Opmg$. Ognuna di tali operazioni codifica l'azione di un numero finito di geni: è quindi opportuno istituire una relazione Rmg che collega opportune liste finite di geni con le operazioni morfogenetiche che essi controllano. Postuliamo quindi

Assioma Gen.3

Rmg è una relazione binaria e $Opmg$ è una collezione di operazioni.

1. *Se vale $Rmg\ G, H$, allora $G = (g_1, \ldots, g_n)$ è una lista finita di geni e H è un'operazione appartenente a $Opmg$, univocamente determinata da G, che chiameremo l'operazione morfogenetica associata a G e indicheremo con H_G.*

2. *Se $H_G v$ esiste, allora v è un vivente e il risultato $h_G v = M \subset Morph$ è un insieme finito di qualità morfologiche.*

3. *Se $q \in M = H_G v$, allora v gode della qualità q e, per ogni i, il gene g_i ha localizzazioni in v ed è collegato a q dalla relazione RGM (cioè si ha qv e, per $i = 1, \ldots, n$, esiste x_i con $Rgloc\ g_i, x_i$ e $Rcomp\ x_i, v$, ed inoltre vale $RGM\ g_i, q$.*

Il punto 3 dell'assioma esprime il fatto che l'operazione H_G corrispondente ai geni della lista finita G agisce su un determinato vivente v, interessando opportune localizzazioni dei geni in questione: l'operazione rappresenta l'intero processo biologico che, attraverso opportuni passaggi la cui natura biochimica può essere nota solo in parte, arriva a produrre nel vivente le trasformazioni atte a fargli presentare le qualità morfologiche appartenenti all'insieme risultato dell'operazione. Si tratta dunque di un'operazione che corrisponde ad un processo generale ("astratto") che, in accordo con l'Assioma 7, si può decomporre in componenti "concrete" che, in opportuni "stati" o "tempi", agiscono su opportune instanziazioni del vivente v, o di suoi costituenti. Abbiamo associato le operazioni morfogenetiche a *liste* e non ad *insiemi* di geni per poter distinguere, all'occorrenza, il caso in cui, ad esempio, si ha un gene g sul cromosoma di origine paterna e uno g' sul cromosoma di origine materna dal caso opposto; va tenuto anche in conto che un gene può comparire in entrambi i cromosomi

o in uno solo di essi, e queste differenti possibilità non sono distinguibili se si considera solo il *singoletto* del gene stesso.

In questo contesto possiamo trattare le mutazioni genetiche in modo assai naturale: basta considerare processi biologici che alterano le localizzazioni di uno o piú geni in un dato vivente, associandovi opportune operazioni. Le localizzazioni cosí trasformate corrispondono ad altri geni (i geni mutati), che a loro volta corrispondono ad operazioni morfogenetiche che possono (ma non necessariamente debbono) produrre differenti qualità morfologiche nei viventi in cui si localizzano le mutazioni. Poniamo quindi l'assioma

Assioma Gen.4 *$OpMut$ e Mut sono collezioni di operazioni, e si ha:*

1. *se $f \in OpMut$ e $fv = m$, allora v è un vivente e $m \in Mut$;*
2. *se $mx = x'$, allora esistono geni $g, g' \in Gen$ e localizzazioni x, x' tali che si abbia Rcomp v, x, Rcomp v, x', Rgloc g, x e Rgloc g', x'.*

Se G è un insieme di geni cui appartiene g e G' si ottiene da G scambiando g con g', allora può capitare che un vivente v', per esempio prodotto da v con un'operazione di generazione effettuata in uno stato opportuno, abbia soltanto localizzazioni di g'. Se ci sono due qualità morfologiche q, q' tali che si abbia $RGM\ g, q$, $RGM\ g', q'$, ma non $RGM\ g', q$, $RGM\ g, q'$, allora si avrà verosimilmente $q'v'$ e non più qv' (mentre al contrario si aveva qv e non $q'v$): la mutazione ha quindi generato un nuovo fenotipo.

2.3 Zigoti e gameti

Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto la relazione RGM, che collega la collezione Gen con la collezione $Morph$, attraverso l'azione di operazioni H_G, ciascuna associata ad un determinato gruppo di geni G, che operano all'interno dei viventi in modo tale da dare origine ad una o più qualità morfologiche. Come abbiamo premesso, ci sono condizioni su G che debbono essere verificate perché le leggi di Mendel si applichino (ad esempio bisogna che i geni di G siano nucleari e autosomali); ma soprattutto condizioni che riguardano i viventi v in cui agiscono le operazioni H_G (ad esempio v deve essere diploide a riproduzione anfimittica biparentale); infine ci sono anche condizioni che riguardano la stessa operazione H (ad esempio non devono essere coinvolti fenomeni di metilazione).

Di fatto Mendel lavora su una particolare classe di oggetti viventi che ha zigote diploide e gameti aploidi. Tra poco definiremo in maniera assiomatica anche zigoti e gameti; per ora introduciamo la qualità $Qgall$ di essere *geni alleli* postulando che posizioni corrispondenti in cromosomi omologhi debbono sempre contenere localizzazioni di uno dei geni alleli:

Assioma Gen.5 *$Qgall$ è una qualità di liste di geni $G = (g_1, \ldots, g_n)$. Se si ha Qgall G e v è un vivente in cui si localizzano geni di G, allora queste localizzazioni si trovano su cromosomi che si presentano a coppie, in modo che se in una determinata posizione di un cromosoma della coppia si localizza un gene g_i di G, allora nella posizione corrispondente dell'altro cromosoma della*

coppia (omologo), si ha una localizzazione di un altro gene g_j di G (che può anche essere lo stesso).

Introduciamo ora i concetti di zigote e gamete, che sono oggetti biologici fondamentali per una trattazione non puramente fenomenologica della genetica e della biologia dello sviluppo, e verranno qui introdotti mediante le qualità $Qzig$ e $Qgam$. Ogni operazione di generazione è un processo composito che presenta componenti omogenee: in particolare, nel caso più comune di un'operazione di generazione di tipo sessuato, lo *zigote* sarà visto come il *risultato* di un'opportuna *componente* che agisce su *gameti*. Postuleremo dunque che una collezione di viventi $\mathcal{C}$ presenta operazioni di generazione *biparentale anfimittica*, che possiedono una o piú componenti di *fecondazione ed anfimissi* che si applicano a opportuni *gameti* e producono uno *zigote*.

Assioma Gen.6 *$Qzig$ e $Qgam$ sono le qualità di essere uno zigote o, rispettivamente, un gamete; $\mathcal{C}$ è una collezione di viventi.*

1. *Se $v \in \mathcal{C}$ allora i geni di v (ad eccezione eventualmente di quelli localizzati sui cromosomi sessuali) sono localizzati in coppie di cromosomi omologhi. Inoltre ogni gamete in v ha soltanto un cromosoma per ciascuna delle coppie di omologhi (quindi il patrimonio genetico di ogni gamete è la metà di quello di una cellula ordinaria del vivente v). Nello zigote i cromosomi omologhi provenienti dai due gameti si accoppiano, riproducendo il normale patrimonio genetico.*

2. *Se $G \in Opgen$ si applica a $x, y \in \mathcal{C}$ e dà come risultato $Gxy = \{z^1, \ldots, z^n\}$, allora sono verificate le condizioni seguenti:*
   i) G ha una decomposizione in componenti che comprende, tra le altre, $2n$ operazioni $g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}, \ldots, g_{2n}$;
   ii) esistono gameti $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, $\delta_1, \ldots, \delta_n$ con $Rcomp\ \gamma_i, x$ e $Rcomp\ \delta_i, y$ tali che, per opportuni zigoti $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ si ha

   $$g_i \gamma_i \delta_i = \zeta_i \quad per\ i = 1, \ldots, n;$$

   iii) si ha $g_{n+i}\zeta_i = z^i$ per $i = 1, \ldots, n$.

La collezione $\mathcal{C}$ introdotta nell'assioma precedente è precisamente quella per cui intendiamo che valgano le leggi di Mendel che assiomatizzeremo nel prossimo paragrafo. Per parlare con maggiore accuratezza di questa collezione e delle operazioni di generazione ad essa peculiari occorrerebbe introdurre altre operazioni biologiche coinvolte essenzialmente, quali la *meiosi* che produce cellule aploidi a partire da cellule diploidi e le varie operazioni che, a partire da queste ultime, provvedono alla formazione dei *gameti* (queste operazioni corrisponderebbero ad altre componenti dell'operazione G, oltre a quelle esplicitamente menzionate nel punto *i)*: una trattazione dettagliata di questi processi, ancorché di enorme interesse biologico, non è essenziale per la nostra assiomatizzazione delle leggi di Mendel, e quindi non intendiamo affrontarla in questo lavoro.

2.4 Le leggi di Mendel

Le leggi di Mendel sono state dedotte dall'analisi dei fenotipi e quindi sulla base di come vengono ereditate alcune qualità morfologiche; in seguito gli sviluppi della ricerca hanno confermato (in parte) tali leggi e hanno permesso di comprenderne il funzionamento dal punto di vista della Genetica molecolare: buona parte degli sforzi di assiomatizzazione della Biologia sono partiti proprio dalla necessità di collegare, in un'unica struttura assiomatica, la Genetica classica (non a caso chiamata anche Genetica formale) e la Genetica molecolare (per una discussione critica della bibiografia al riguardo rimandiamo all'esauriente lavoro di Rizzotti [**?**]).

Cominciamo a considerare una situazione semplificata in cui una qualità morfologica è collegata a due geni, cioè è il risultato di un'operazione H_G che corrisponde ad una lista $G = (g, g')$ costituita da due soli geni alleli. Naturalmente questa è un'ipersemplificazione, in quanto l'operazione che avviene in realtà richiede la presenza di parecchi altri geni, che però, in prima approssimazione, possono essere trascurati. Consideriamo dunque la situazione in cui due qualità q, q' sono connesse nella relazione RGM con due geni alleli in modo che uno dei due alleli sia dominante, cioè che si abbia:

$$RGM\ g, q \quad RGM\ g', q \quad RGM\ g', q'.$$

Questa situazione corrisponde, in base all'Assioma Gen.3, a considerare operazioni H_G corrispondenti alle quattro liste finite $(g, g), (g, g'), (g', g), (g', g')$ e ad assumere che

$$H_{(g,g)}v = q, \quad H_{(g',g')}v = q', \quad H_{(g,g')}v = q \ \ e \ \ H_{(g',g)}v = q.$$

La prima Legge di Mendel si può allora formulare così:

Assioma Mend.1 (Prima Legge di Mendel)
Se g, g' sono due geni alleli (cioè si ha $Qgall\ (g, g')$), allora esistono due qualità $q, q' \in Morph$ connesse nella relazione RGM con g, g' in modo tale che si abbia:

$$RGM\ g, q \quad RGM\ g', q \quad RGM\ g', q'.$$

Diremo in tal caso che q, q' sono qualità mendeliane e che g è l'allele dominante.

Naturalmente l' assioma si può generalizzare per un sistema *poliallelico*, in cui nella specie vi siano più di due qualità e quindi più geni che formano varie coppie di alleli; inoltre si può estendere l'assioma anche al caso in cui non vi sia *dominanza*. Gli assiomi corrispondenti sarebbero solo più lunghi e faticosi da leggere, ma non più complessi teoricamente: pertanto non stiamo a formularli esplicitamente qui. Passiamo invece ad assiomatizzare la seconda Legge di Mendel nel modo seguente:

Assioma Mend.2 (Seconda Legge di Mendel)
Sia data una coppia di alleli $g, g' \in Gen$ e sia G un'operazione di generazione che agisce su due opportuni oggetti viventi x, y che hanno le loro localizzazioni dei geni alleli, x_1, x_2 e y_1, y_2 rispettivamente. Se $Gxy = \{z^1, \ldots, z^n\}$, allora ciascuno degli z^i ottenuti dall'operazione avrà le localizzazioni degli alleli z^i_1, z^i_2 scelte in modo statisticamente casuale, una da x e una da y.

Se ai geni g, g' corrispondono secondo la prima legge le qualità $q, q' \in Morph$ e, per esempio, x corrisponde al tipo puro (g, g) e y a (g', g'), allora tutti gli z^i sono del tipo (g, g') e quindi godono tutti di q, nonostante il secondo genitore abbia la qualità q'. Se invece x, y sono entrambi (g, g') (come, in accordo con l'assioma, capita certamente incrociando tra loro due degli z^i), allora i figli si distribuiscono uniformemente nei quattro casi (g, g), (g, g'), (g', g) e (g', g'): pertanto si osserverà una proporzione 3 a 1 fra le qualità q e q'.

Più in generale, se in una popolazione la frequenza del gene g è p e quella di g' è conseguentemente $p' = 1 - p$, allora le frequenze delle coppie (g, g), (g, g'), (g', g) e (g', g') saranno rispettivamente p^2, pp', $p'p$ e p'^2, e tale proporzione si preserva attraverso le operazioni di generazione, purché siano rispettate le ovvie condizioni di indipendenza: questa è sostanzialmente la formulazione del Teorema di Hardy-Weinberg nel nostro quadro.

Anche la terza Legge di Mendel può essere naturalmente espressa in questo contesto. Occorre anzitutto introdurre la nozione di "geni indipendenti": secondo il nostro stile, introduciamo in modo astratto una qualità *Qind*, ma possiamo subito darne una condizione biologica dicendo che, se le coppie di alleli sono indipendenti, allora le localizzazioni dei geni negli individui x, y sono su differenti coppie di cromosomi omologhi. Postuliamo quindi l'assioma

Assioma Gen.7 *Qind è una qualità di liste di geni. Se $G = (g_1, \ldots, g_n)$ è una lista di geni indipendenti (cioè tale che si abbia Qind G) e v è un vivente in cui sono localizzati i geni di G (cioè si ha Rgloc g_i, x_i e Rcomp v, x_i), allora le localizzazioni x_i sono su cromosomi diversi.*

La terza Legge di Mendel dice allora che nei figli le distribuzioni di geni indipendenti sono statisticamente indipendenti fra loro:

Assioma Mend.3 (Terza Legge di Mendel)
Sia $G = (g_1, \ldots, g_m)$ una lista di geni tale che si abbia Qind G e sia Γ un'operazione di generazione che agisce su due opportuni oggetti viventi x, y che hanno le loro localizzazioni dei geni di G, x_i e y_i rispettivamente. Se $\Gamma xy = \{z^1, \ldots, z^n\}$, allora la distribuzione dei geni negli z^i ottenuti dall'operazione avrà le localizzazioni degli alleli z^i_1, z^i_2 scelte in modo statisticamente casuale, una da x e una da y.

Per esempio, supponiamo di considerare simultaneamente due coppie di geni alleli indipendenti (g_1, g'_1) e $(g_2, g'_2) \in Gen$ con $Qind\ (g_1, g_2)$, e le corrispondenti qualità morfologiche q_1, q'_1 e $q_2, q'_2 \in Morph$. Se, come sopra, a x corrispondono (g_1, g_1) e (g_2, g_2) mentre a y corrispondono (g'_1, g'_1) e (g'_2, g'_2), allora a tutti gli z^i corrispondono le sequenze $(g_1, g'_1), (g_2, g'_2)$ e quindi godono tutti delle qualità q_1, q_2, pur avendo il secondo genitore le qualità q'_1, q'_2. Se invece x, y sono entrambi $(g_1, g'_1), (g_2, g'_2)$ (come capita certamente incrociando due degli z^i) allora i figli si distribuiscono uniformemente nei sedici casi possibili: pertanto si osserverà una proporzione 9:3:3:1 fra le coppie di qualità (q_1, q_2), (q'_1, q_2), (q_1, q'_2) e (q'_1, q'_2).

References

[1] E. De Giorgi, M. Forti, G. Lenzi - Una proposta di teorie base dei Fondamenti della Matematica. *Rend. Mat. Acc. Lincei* (9) **5** (1994), 11-22.

[2] E.De Giorgi, M.Forti, G.Lenzi - Introduzione delle variabili nel quadro delle Teorie Base dei Fondamenti della Matematica, *Rend. Mat. Acc. Lincei* (9) **5** (1994), 117-128.

[3] M. Forti, G. Lenzi - A General Axiomatic Framework for the Foundations of Mathematics, Logic and Computer Science. *Rend. Acc. Naz. Sci. XL, Mem. Mat. Appl.* **21** (1997), 171-207.

[4] M. Forti, F. Honsell - *Positive qualities and the ontological argument.* Quad. Dip. Mat. Appl. "U. Dini" **5**, Pisa 1997.

[5] M. Forti, F. Honsell, M. Lenisa - Operations, Collections and Sets within a general axiomatic framework, in *Logic and Foundations of Mathematics - Selected Contributed Papers of the Tenth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Florence, August 1995* (A. Cantini, E. Casari and P. Minari, eds.). *Synthese Library* **280**, Kluwer, Dordrecht 1999, 1-24.

[6] L. Galleni, M. Forti - Un'assiomatizzazione di alcuni concetti della Biologia nell'ambito delle teorie fondazionali di E. De Giorgi, in *La matematizzazione della Biologia: storia e problematiche attuali - Atti del I workshop di Arcidosso, 31/VIII-3/IX 1997* (P. Cerrai and P. Freguglia, eds.). QuattroVenti, Urbino 1999, 119-132.

[7] L. Galleni, M. Forti - An axiomatization of biological concepts within the foundational theory of Ennio De Giorgi. *Biology Forum* **92** (1999), 77-104.

[8] M. Forti - The Foundational Theories of Ennio De Giorgi, in *Foundations in Mathematics and Biology: Problems, Prospects, Interactions - I International Meeting of the I. R. A. F. S., Rome 26-27/XI/1998* (G. Basti, L. Galleni, A. Perrone, eds.), *Aquinas* (2000, to appear).

[9] M. Forti, P. Freguglia, L. Galleni - An axiomatic approach to some biological themes, in *The applications of Mathematics to the sciences of nature: critical moments and aspects - Proceedings of the I international workshop, Arcidosso, 28/VI-1/VII 1999* (P. Cerrai et al., eds.). Kluwer, Dordrecht 2000 (to appear).

[10] L.Galleni - Foundation of Biology and the search for an axiomatic language, in *Foundations in Mathematics and Biology: Problems, Prospects, Interactions - I International Meeting of the IRAFS, Rome 26-27/XI/1998* (G. Basti, L. Galleni, A. Perrone eds.), *Aquinas* (2000, to appear).

[11] J. Gayon - *Darwin et l'après Darwin: une histoire de l' hypothèse de sélection naturelle*, Kimè, Paris 1992.

[12] M. Przelecki - On the Concept of Genotype, in *Form and strategy in science* (J. R. Gregg, F. T. C. Harris, eds.), Reidel, Dordrecht 1964, 315-329.

[13] M. Rizzotti - The axiomatization of Genetics: incommunicability, claims, results, *Annales Biotheoretici* **1** (1997), 1-13.

[14] M. Rizzotti, A. Zanardo. - Axiomatization of Genetics. 1. Biological meaning, *J. Theor. Biol.* **118** (1986), 61-71.

[15] M. Rizzotti, A. Zanardo. - Assiomatizzazioni della genetica: aspetti non estensionali in alcune leggi elementari della genetica classica, *Mem. Fis. Nat. Acc. Lincei* (9) **2** (1993), 87-125.

[16] M. Ruse. - Woodger on genetics. A critical evaluation, *Acta Biotheoretica* **24** (1975), 1-13.

[17] J. H. Woodger. - *The axiomatic method in Biology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1937.

[18] J. H. Woodger. - Studies in foundations of Genetics, in *The axiomatic method* (L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski, eds.), North Holland, Amsterdam 1959, vol.4, 8-428.

[19] A. Zanardo, M. Rizzotti. - Axiomatization of Genetics. 2. Formal development, *J. Theor. Biol.* **118** (1986), 145-152.

[20] A. Zanardo, M. Rizzotti. - Is there a paradox in mendelian genetics?, in *Nauka i jezyk* (M. Omyla, ed.), Varsavia 1994, 433-450.